



**Федеральное агентство по образованию  
Рубцовский индустриальный институт  
ГОУ ВПО «Алтайский государственный технический  
университет им. И.И. Ползунова»**

**В.Т. Гетманов**

# **Линейные электрические цепи**

**Курс лекций по теоретическим основам электротехники**

Учебное пособие для студентов специальности  
140211 – Электроснабжение всех форм обучения

Рекомендовано Сибирским региональным отделением УМО высших учебных заведений РФ по образованию в области энергетики и электротехники для межвузовского использования в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению подготовки 140200 «Электроэнергетика»

Рубцовск 2009

УДК 621.3

Гетманов В.Т. Линейные электрические цепи: Курс лекций по теоретическим основам электротехники: Учебное пособие для студентов специальности 140211 всех форм обучения. – Рубцовск: Рубцовский индустриальный институт, 2009. - 130 с.

В настоящем пособии излагаются свойства и методы расчета линейных электрических цепей постоянного, синусоидального и трехфазного токов. Приводится достаточное количество примеров расчетного характера, которые иллюстрируют излагаемые в теории методы расчета.

Рассмотрено и одобрено  
на заседании каф.  
электроэнергетики РИИ.  
Протокол № 10 от 15.10.09.

Рецензенты:

заведующий кафедрой электроснабжения  
промышленных предприятий Томского  
политехнического университета, доктор  
технических наук, профессор Б.В. Лукутин;

директор филиала АКГУПКЭС «Алтай-  
крайэнерго Рубцовские межрайонные  
электрические сети» Г.И. Старыгин.

© Гетманов В.Т., 2009

© Рубцовский индустриальный институт, 2009

## **ВВЕДЕНИЕ**

Электротехника – это наука о техническом использовании электрических и магнитных явлений. Её значение для современной промышленности и быта объясняется тем, что средствами электротехники относительно просто получают и передают электроэнергию, преобразуют её в другие формы энергии, а также решают вопросы передачи и преобразования сигналов и информации. Все это и определяет необходимость глубоких знаний по электротехнике, которыми должны обладать инженеры-электрики.

При написании настоящего пособия ставилась задача создать учебное пособие, отражающее современное состояние теоретической электротехники и соответствующее государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования 2000 г. по направлению подготовки дипломированного специалиста 140200 Электроэнергетика (специальность 140211 – Электроснабжение).

Курс теоретических основ электротехники для студентов очной формы обучения в Рубцовском индустриальном институте преподается в течение трех семестров. Учебный план и рабочая программа курса предусматривают в первом семестре изучение линейных цепей постоянного тока, однофазных синусоидальных и трехфазных цепей. Настоящее пособие и посвящено рассмотрению этих вопросов.

Материал в пособии изложен, по возможности, кратко за счет применения более простых выводов и доказательств и исключения некоторых вопросов, входящих в программу циклов общепрофессиональных и специальных дисциплин. Каждый раздел имеет достаточное количество задач и примеров с решениями.

Понимание теории электрических процессов требует от студентов знаний многих разделов курса математики и физики. В частности, из курса высшей математики студент должен знать теорию комплексных чисел, векторную алгебру, уметь решать дифференциальные уравнения. Из курса физики студент должен обладать знаниями по электричеству и магнетизму.

Пособие предназначено в помощь студентам всех форм обучения. Но особенно оно полезно студентам заочной формы обучения. Так как у них значительно меньше времени для самостоятельной работы, чем у студентов, обучающихся с отрывом от производства, то им трудно пользоваться существующими объемными учебниками, задачками и другой литературой. Самостоятельная проработка изложенного материала вполне достаточна для успешного выполнения контрольных, расчетно-графических работ, сдачи зачетов и экзаменов.

При написании пособия учитывался опыт чтения автором лекций по теоретическим основам электротехники в Томском политехническом университете. Автор искренне благодарен доцентам этого университета Могилевской Т.Ю. и Купцову А.М. за постоянную помощь и неоценимые методические советы в начале своей преподавательской деятельности.

Автор считает приятным долгом поблагодарить инженеров кафедры электроэнергетики Шкуратову И.А. и Федосову Н.И., а также методиста деканата электротехнического факультета Костыркину О.В. за помощь при подготовке рукописи к изданию.

# 1. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

## 1.1. Электрическая цепь, законы Ома и Кирхгофа

Простейшая электрическая цепь – это совокупность источника электрической энергии, резистора нагрузки и соединительных проводов, образующих замкнутый контур, по которому течет электрический ток.

Направленное движение электрических зарядов в проводящей среде происходит за счет энергии источников электрической энергии цепи, которыми могут быть батарея, аккумулятор, генератор и т.д.

Для расчета электрических цепей обычно составляют схемы замещения, в которых реальные элементы цепи представляются их расчетными моделями (идеализированными элементами).

Любой источник электрической энергии характеризуется электродвижущей силой (э.д.с.)  $E$ . На схеме замещения (рисунок 1.1.) реальный источник электрической энергии с э.д.с.  $E$  и внутренним сопротивлением  $R_0$  может быть представлен двумя способами: схемой

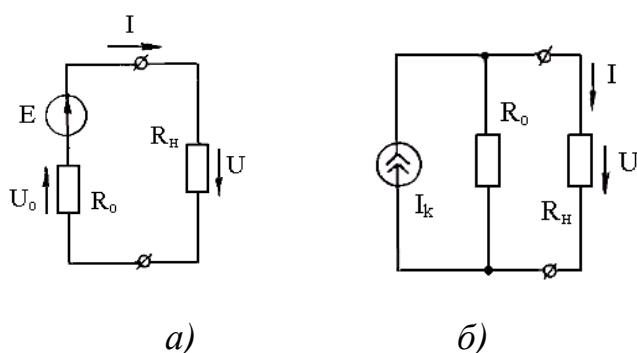


Рисунок 1.1 - Схемы замещения реального источника электрической энергии

замещения с идеальным источником э.д.с. (рисунок 1.1,а), внутреннее сопротивление которого равно нулю, и схемой замещения с идеальным источником тока  $I_k$  (рисунок 1.1,б). Такой источник имеет бесконечно большое внутреннее сопротивление, и создаваемый им ток  $I_k = \frac{E}{R_0}$  не зависит от сопротивления внешней цепи ( $R_n$ ). В зависимости от решения конкретной задачи удобнее пользоваться либо последовательной схемой замещения (рисунок 1.1,а), либо параллельной (рисунок 1.1,б).

Нагрузка в цепях постоянного тока на схемах замещения представляется резистивным элементом (резистором)  $R_n$ . Если сопротивление резисторов электрической цепи не зависит от токов в них или приложенных к ним напряжений, то такую цепь называют линейной.

Основными законами электрических цепей, описывающими любые режимы их работы, являются закон Ома и законы Кирхгофа.

В 1827 г. немецкий физик Ом открыл закон, устанавливающий связь между током и напряжением на участке цепи:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (1.1)$$

Закон Ома для участка цепи выражает прямую пропорциональность между напряжением на зажимах резистора и током, протекающим через него. К примеру, напряжение на резисторе  $R_n$  (рисунок 1.1,а):

$$U = I \cdot R_n = \frac{I}{g_n},$$

где  $g_n = \frac{1}{R_n}$  - проводимость – величина, обратная сопротивлению.

Сопротивление измеряется в омах (Ом), а проводимость – в сименсах (См).

Последовательная схема (рисунок 1.1,а) рассчитывается с помощью закона Ома для полной цепи. Ток в ней:

$$I = \frac{E}{R_o + R_n}. \quad (1.2)$$

Из схемы (рисунка 1.1,а) следует, что напряжение  $U$  на зажимах источника электрической энергии всегда меньше его э.д.с. на величину падения напряжения на его внутреннем сопротивлении  $U_o = I \cdot R_o$ . Возможны два крайних случая. Холостой ход - когда внешняя цепь разомкнута ( $R_n = \infty$ ), ток в цепи равен нулю ( $I = I_{xx} = 0$ ) и напряжение  $U = U_{xx} = E$ . И короткое замыкание - когда сопротивление нагрузки  $R_n = 0$ . В этом случае напряжение на выводах источника  $U = 0$ , а ток в цепи  $I = I_{кз} = \frac{E}{R_o}$  может достигать весьма больших значений, так как обычно  $R_o \ll R_n$ . Любые режимы работы этой цепи при изменении сопротивления нагрузки находятся между ними.

Круг задач в электротехнике не ограничивается простыми (неразветвленными) цепями. Чаще встречаются сложные (разветвленные) цепи, в которых токи и напряжения на разных участках различны. Сложные цепи бывают с одним источником электрической энергии и с несколькими. Примеры таких цепей приведены на рисунке 1.2.

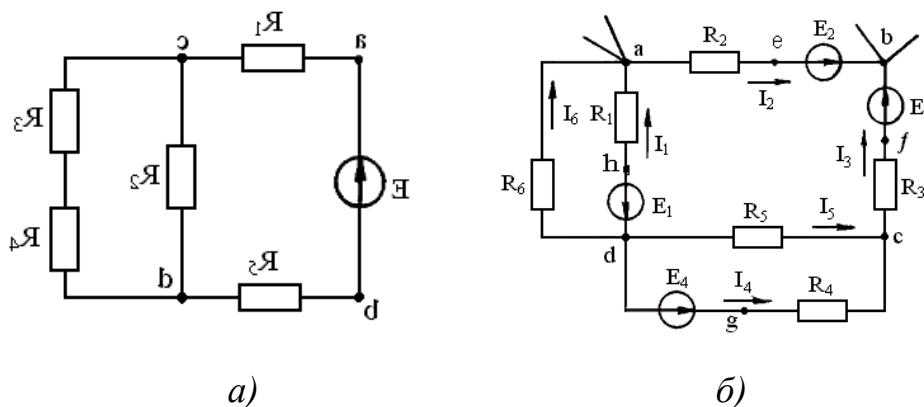


Рисунок 1.2 - Примеры сложных электрических цепей

Для разветвленных цепей вводят понятия узла, ветви и контура. Узел – это точка электрической цепи (схемы замещения), где сходятся не менее трех проводников. Точки  $a, b, c, d$  – узлы (рисунок 1.2, б). Ветвью называют участок, соединяющий два узла. В каждой ветви течет свой ток, который один и тот же для всех элементов этой ветви. Контур представляет собой путь вдоль ветвей электрической цепи, начинающийся и заканчивающийся в одной и той же точке. Для схемы замещения рисунка 1.2, б можно выделить контуры  $aebfcdha$ ,  $cgdc$ ,  $ahda$  и т.д.

Немецкий физик Кирхгоф установил в 1845 г. законы электрического равновесия цепей. Уравнения, составленные на основе этих законов, называют уравнениями Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа устанавливает связь между токами в узле электрической цепи и формулируется: *алгебраическая сумма токов ветвей, сходящихся в узле электрической цепи, равна нулю.*

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0, \quad (1.3)$$

где  $I_k$  – ток  $k$ -й ветви, присоединенной к узлу.

При составлении уравнения по первому закону Кирхгофа в выражении (1.3) токи, подтекающие к узлу, считают положительными, а оттекающие от узла – отрицательными (или наоборот).

Для узла  $c$  схемы замещения (рисунок 1.2,б) уравнение по первому закону Кирхгофа будет иметь вид:

$$I_5 + I_4 - I_3 = 0,$$

а для узла  $d$ :

$$-I_1 - I_4 - I_5 - I_6 = 0.$$

Второй закон Кирхгофа устанавливает связь между напряжениями и э.д.с. в контуре: *алгебраическая сумма падений напряжений вдоль замкнутого контура сложной электрической цепи равна алгебраической сумме э.д.с., действующих в этом контуре.*

$$\sum_{k=1}^n U_k = \sum_{k=1}^m E_k, \quad (1.4)$$

где  $U_k = R_k I_k$  – падение напряжения на  $k$ -м резисторе контура;  $E_k$  –  $k$ -я э.д.с., входящая в данный контур;  $m$  – число э.д.с. в контуре;  $n$  – число резисторов контура.

Для записи уравнения по второму закону Кирхгофа сначала выбирают направление обхода, контура (по часовой стрелке или против). Те э.д.с., которые совпадают с направлением обхода контура, берутся положительными, а не совпадающие – отрицательными. Падение напряжения на резисторе записывается со знаком «плюс», если направление тока в нем совпадает с направлением обхода контура.

Для контура  $aebfcdha$  (рисунок 1.2,б) уравнение по второму закону Кирхгофа будет иметь вид:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_5 R_5 = E_2 - E_1 - E_3,$$

а для контура  $aebfcgda$ :

$$I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_4 R_4 + I_6 R_6 = E_2 - E_3 - E_4.$$

## 1.2. Преобразование схем замещения электрических цепей

В большинстве случаев преобразование схем замещения электрических цепей приводит к их упрощению и облегчению расчета. Различают последовательное, параллельное и смешанное соединение элементов схем замещения. Рассмотрим эти виды соединений и способы их преобразования.

При последовательном соединении (рисунок 1.3,а) по всем элементам протекает один и тот же ток. На основании второго закона Кирхгофа можно записать:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = I R_1 + I R_2 + I R_3 = I (R_1 + R_2 + R_3).$$

Последовательное соединение резисторов обычно представляется одним эквивалентным резистором  $R_3$ , и для эквивалентной схемы замещения (рисунок 1.3,б) можно записать:

$$U = I R_3.$$

Сравнивая выражения для напряжения  $U$  в исходной и эквивалентной схемах, нетрудно увидеть, что  $R_3 = R_1 + R_2 + R_3$ .

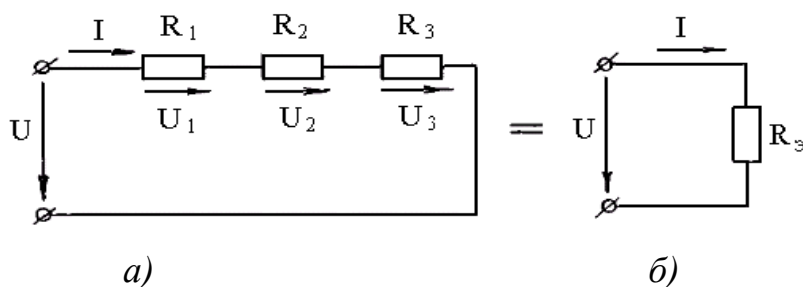


Рисунок 1.3 - Последовательное соединение элементов электрической цепи

Для  $n$  последовательно соединенных резисторов сопротивление эквивалентного резистора определяется как

$$R_3 = \sum_{k=1}^n R_k. \quad (1.5)$$

Параллельное соединение резисторов характеризуется тем, что они находятся под одним напряжением  $U$  (рисунок 1.4,а).

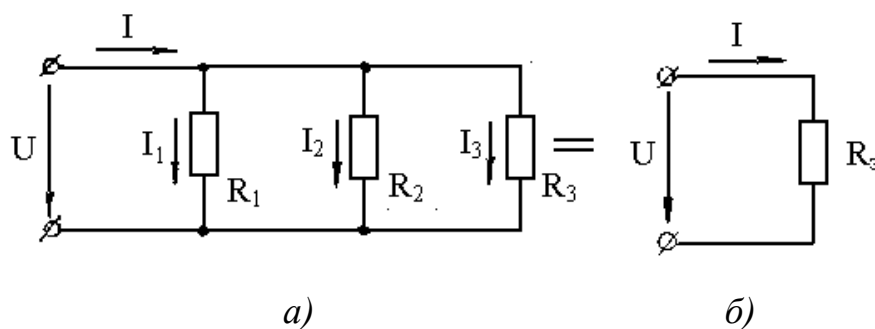


Рисунок 1.4 - Параллельное соединение резисторов



По первому закону Кирхгофа для исходной схемы (рисунок 1.4,а) можно записать:

$$I = I_1 + I_2 + I_3.$$

Расписав токи в параллельных ветвях по закону Ома, будем иметь:

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3},$$

а для эквивалентной схемы замещения (рисунок 1.4,б)  $I = \frac{U}{R_э}$ . Приравнявая правые части выражений для тока в цепи, получим:

$$\frac{U}{R_э} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3},$$

или

$$\frac{1}{R_э} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Таким образом, при параллельном соединении резисторов, эквивалентная проводимость равна сумме проводимостей параллельных ветвей, т.е.

$$g_э = g_1 + g_2 + g_3. \quad (1.6)$$

В случае  $n$  параллельно соединенных резисторов:

$$g_э = \sum_{k=1}^n g_k, \quad (1.7)$$

а эквивалентное сопротивление цепи определится:

$$R_э = \frac{1}{g_э}. \quad (1.8)$$

В случае двух параллельно соединенных резисторов (рисунок 1.5) можно записать:

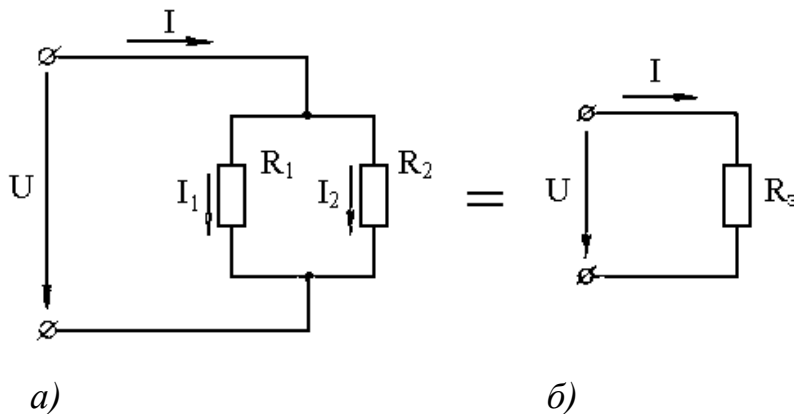


Рисунок 1.5 - Параллельное соединение двух резисторов

$$\frac{1}{R_э} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad \text{или}$$

$$\frac{1}{R_э} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}, \quad \text{откуда:}$$

$$R_э = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}. \quad (1.9)$$

Для исходной схемы (рисунок 1.5,а) приложенное напряжение определяется как  $U=I_1R_1$ , а для эквивалентной:  $U=IR_3$ , т.е.

$$I_1 \cdot R_1 = I \cdot R_3, \quad \text{или} \quad I_1 \cdot R_1 = I \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

Откуда ток в одной из параллельных ветвей определится:

$$I_1 = \frac{I \cdot R_2}{R_1 + R_2}. \quad (1.10)$$

Таким образом, если известен ток  $I$  в неразветвленной части цепи, то ток в одной из параллельных ветвей равен этому току, умноженному на сопротивление противоположной параллельной ветви и деленному на сумму сопротивлений параллельных ветвей. Согласно этому, для определения тока во второй параллельной ветви можно записать:

$$I_2 = \frac{I \cdot R_1}{R_1 + R_2}.$$

Сейчас есть возможность показать идентичность последовательной и параллельной схем замещения (рисунок 1.1) источника электрической энергии по отношению к нагрузке  $R_n$ . Ток в резисторе  $R_n$  должен быть одинаков для обеих схем. В последовательной схеме замещения ток  $I = \frac{E}{R_0 + R_n}$ , а в параллельной он определяется по выражению (1.10):

$$I = I_k \frac{R_0}{R_0 + R_n} = \frac{E \cdot R_0}{R_0(R_0 + R_n)} = \frac{E}{R_0 + R_n}.$$

Для смешанного соединения резисторов характерно наличие участков с параллельным и последовательным соединением резисторов (рисунок 1.6).

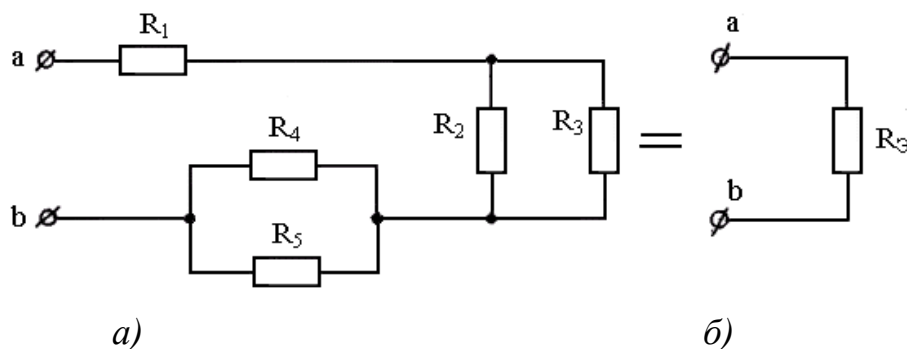


Рисунок 1.6 - Смешанное соединение резисторов

Для преобразования такого соединения до одного эквивалентного резистора  $R_3$  сначала заменяют участки с параллельным соединением резисторов эквивалентными, а затем получающиеся последовательные. Для схемы (рисунок 1.6) можно записать:

$$R_3 = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5}.$$

В практике встречаются схемы (рисунок 1.7), в которых нет возможности выделить участки с параллельным или последовательным соединением

резисторов. В этом случае целесообразно воспользоваться эквивалентной заменой треугольника резисторов  $R_1, R_2, R_3$  трехлучевой звездой резисторов  $R_a, R_b, R_c$ .

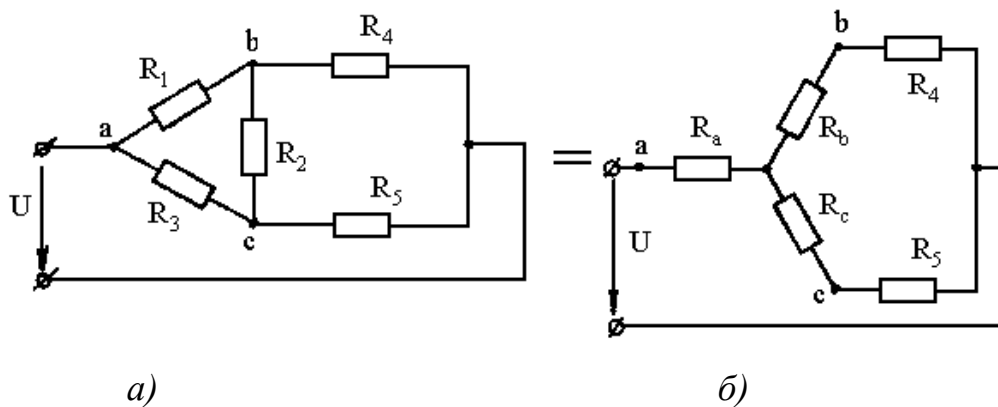


Рисунок 1.7 - К замене треугольника резисторов эквивалентной звездой

В этом случае по известным значениям сопротивлений резисторов сторон треугольника ( $R_1, R_2, R_3$ ) определяются сопротивления резисторов лучей звезды по следующим формулам:

$$\begin{aligned} R_a &= \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \\ R_b &= \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}, \\ R_c &= \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

После этого нетрудно заменить схему (рисунок 1.7,б) одним эквивалентным резистором относительно зажимов источника напряжения  $U$ :

$$R_0 = \frac{(R_b + R_4)(R_c + R_5)}{R_b + R_4 + R_c + R_5} + R_a.$$

Если требуется эквивалентная замена звезды резисторов треугольником, то для определения сопротивлений резисторов сторон треугольника по известным значениям сопротивлений резисторов лучей звезды (рисунок 1.7,б) можно воспользоваться соотношениями:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_a + R_b + \frac{R_a \cdot R_b}{R_c}, \\ R_2 &= R_b + R_c + \frac{R_b \cdot R_c}{R_a}, \\ R_3 &= R_a + R_c + \frac{R_a \cdot R_c}{R_b}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Часто при практических расчетах используется замена источника тока источником э.д.с., что позволяет также облегчить расчет. Допустим, в схеме рисунка 1.8,а необходимо определить ток  $I_1$ , если  $E=100 \text{ В}$ ,  $I_{\kappa}=5 \text{ А}$ ,  $R_1=4 \text{ Ом}$ ,  $R_2=6 \text{ Ом}$ .

Сначала преобразовывают источник тока  $I_k$  в источник э.д.с. (рисунок 1.8,б), э.д.с. которого  $E_k = I_k \cdot R_2 = 5 \cdot 6 = 30$  В, а затем из уравнения по второму закону Кирхгофа определяется ток  $I_1$ :

$$I_1(R_1 + R_2) = E - E_k.$$

$$I_1 = \frac{E - E_k}{R_1 + R_2} = \frac{100 - 30}{4 + 6} = \frac{70}{10} = 7 \text{ А.}$$

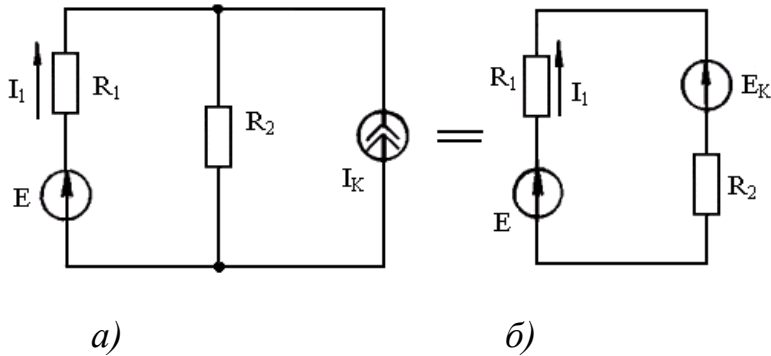


Рисунок 1.8 - К замене источника тока источником э.д.с.

Иногда устранение контура с источником тока облегчает задачу дальнейшего упрощения разветвленной цепи. В этом случае сначала источник тока (рисунок 1.9, а) заменяется несколькими одинаковыми, последовательно соединенными источниками тока (рисунок 1.9,б), с последующим соединением промежуточных точек (рисунок 1.9,в), а затем от схемы с источником тока переходят к схеме с источниками э.д.с. (рисунок 1.9,г), э.д.с. которых определяется:

$$E_{12} = I_k \cdot R_{12}, \quad E_{23} = I_k \cdot R_{23}.$$

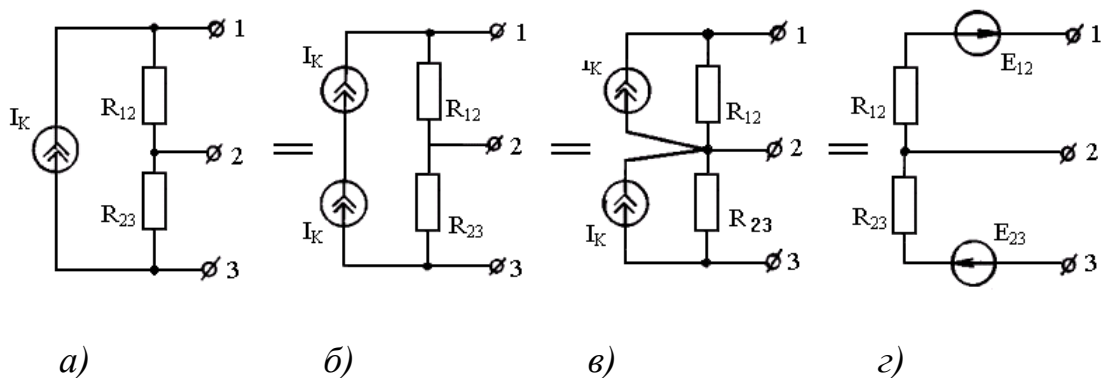


Рисунок 1.9 - К вопросу об устранении контура с источником тока

При преобразовании цепей используют также перенос э.д.с. через узел. Так, источник э.д.с.  $E$  (рисунок 1.10,а) можно перенести в ветви с резисторами  $R_1$  и  $R_2$ , а узел  $A$  устранить.

Справедливость такого преобразования очевидна. Если в ветви с резисторами  $R_1$  и  $R_2$  (рисунок 1.10,а) включить по две одинаковых, противоположно направленных э.д.с.  $E$  (рисунок 1.10,в), то токи в этих ветвях останутся прежними, а потенциал точки  $Д$  равен потенциалу точки  $В$

$$(\varphi_A = \varphi_D + E, \quad \varphi_B = \varphi_A - E = \varphi_D + E - E = \varphi_D). \text{ Аналогично } \varphi_C = \varphi_B.$$

Объединив точки  $С$ ,  $Д$  и  $В$ , как равнопотенциальные, получим схему рисунка 1.10, б).

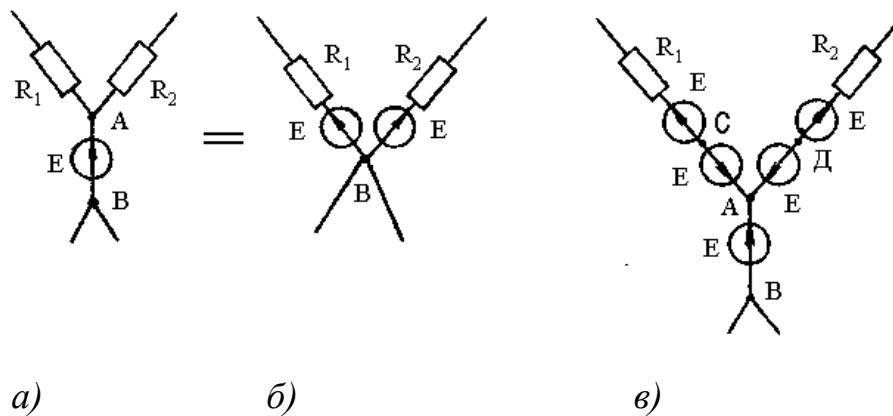


Рисунок 1.10 - Иллюстрация к переносу э.д.с. через узел

В практических схемах встречаются активные звезды и треугольники резисторов, когда в лучах звезды или сторонах треугольника есть источник электрической энергии. Если необходимо преобразовать такую звезду резисторов (рисунок 1.11,а) в треугольник, то сначала пассивную звезду заменяют треугольником (рисунок 1.11,б).

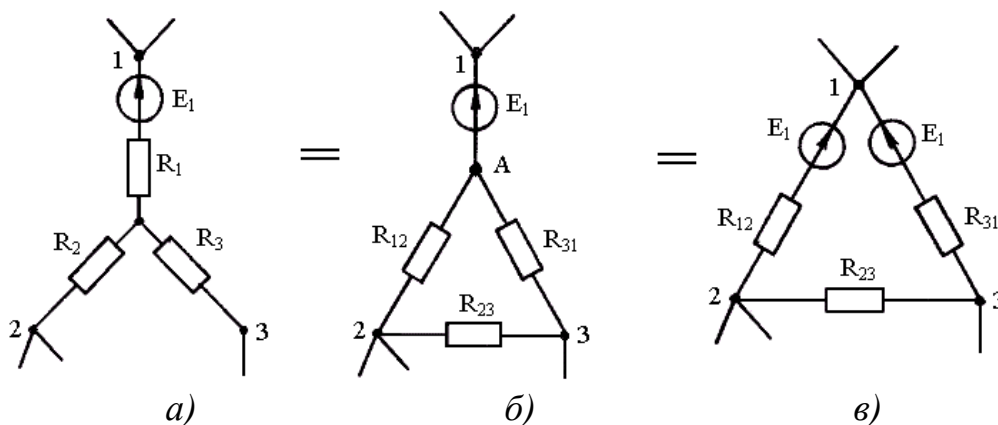


Рисунок 1.11 - К преобразованию активной звезды в треугольник

Сопротивления резисторов сторон его определяются по приведенным выше формулам (1.12), т.е.:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3},$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1},$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2}.$$

А затем э.д.с.  $E_1$  переносится через узел  $A$  (рисунок 1.11,в).

Если необходимо произвести эквивалентное преобразование активного треугольника резисторов (рисунок 1.12,а) в звезду, то сначала заменяют источник э.д.с.  $E_{12}$  источником тока  $I_{12}$  (рисунок 1.12,б),

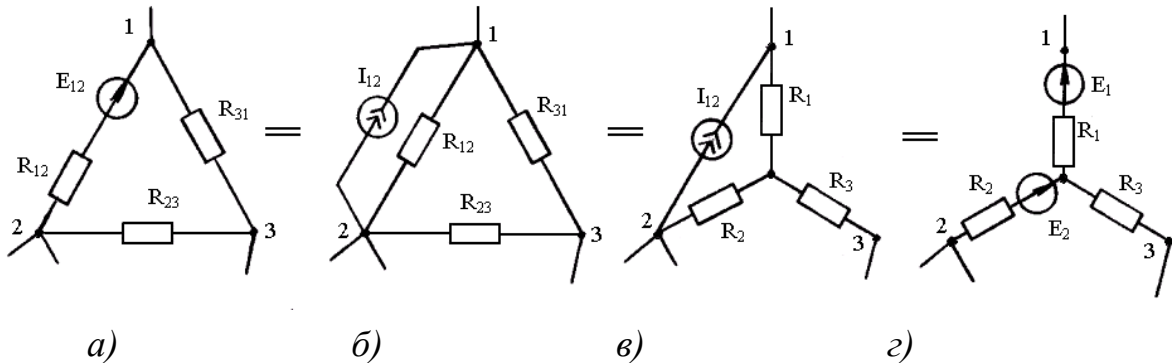


Рисунок 1.12 - Преобразование активного треугольника резисторов в звезду

величина которого  $I_{12} = \frac{E_{12}}{R_{12}}$ , а затем получившийся пассивный треугольник заменяют эквивалентной звездой (рисунок 1.12,в). Сопротивления лучей этой звезды определяются из формул (1.11) как:

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Далее устраняется контур с источником тока  $I_{12}$  (рисунок 1.12,г). Значения э.д.с. в лучах звезды определяется как:

$$E_1 = I_{12} \cdot R_1 = \frac{E_{12} \cdot R_1}{R_{12}}, \quad E_2 = I_{12} \cdot R_2 = \frac{E_{12} \cdot R_2}{R_{12}}.$$

Часто схема значительно упрощается, если несколько параллельных ветвей, содержащих источники э.д.с. или тока, заменить одной эквивалентной ветвью. К примеру, если в схеме рисунка 1.13,а необходимо определить ток  $I_1$ ,

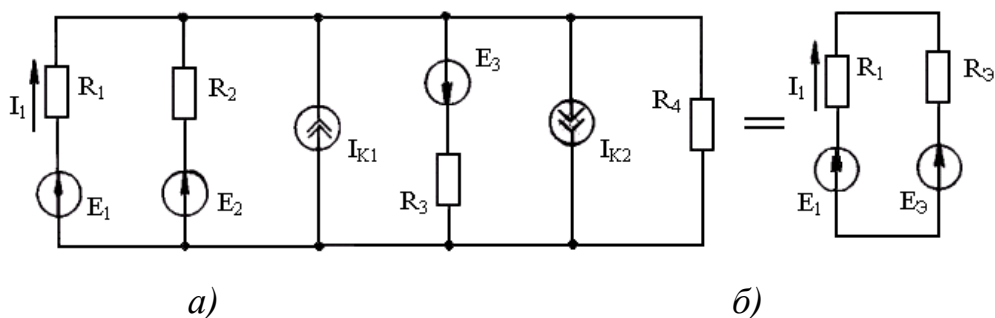


Рисунок 1.13 - Иллюстрация к замене нескольких параллельных ветвей одной эквивалентной

то целесообразно все параллельные ветви представить одной эквивалентной с параметрами  $R_э$  и  $E_э$  (рисунок 1.13,б).

Эквивалентная э.д.с.  $E_э$  в общем виде определяется:

$$E_э = \frac{\sum_{\kappa=1}^n E_\kappa \cdot g_\kappa + \sum_{\kappa=1}^n I_\kappa}{\sum_{\kappa=1}^n g_\kappa}. \quad (1.13)$$

В числителе записывается алгебраическая сумма произведений  $E_\kappa \cdot g_\kappa$  ветвей, содержащих э.д.с. С плюсом берется  $E_\kappa g_\kappa$  в том случае, если э.д.с. в рассматриваемой ветви совпадает по направлению с произвольно выбранным положительным направлением э.д.с.  $E_э$ . Сумма  $I_\kappa$  также алгебраическая, с плюсом записывается ток источника тока, который направлен к точке высшего потенциала. В знаменателе выражения (1.13) записывается арифметическая сумма проводимостей всех параллельных ветвей. Эквивалентное сопротивление определяется как

$$R_э = \frac{1}{g_э}, \quad \text{где} \quad g_э = \sum_{\kappa=1}^n g_\kappa. \quad (1.14)$$

Для примера рисунка 1.13 будем иметь:

$$E_э = \frac{\frac{E_2}{R_2} - \frac{E_3}{R_3} + I_{\kappa 1} - I_{\kappa 2}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}},$$

$$g_э = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}, \quad R_э = \frac{1}{g_э}.$$

Записав уравнение по второму закону Кирхгофа для схемы рисунка 1.13,б, можно определить ток  $I_1$ :

$$I_1(R_1 + R_э) = E_1 - E_э,$$

$$I_1 = \frac{E_1 - E_э}{R_1 + R_э}.$$

Рассмотрим пример на преобразование цепей.

**Пример 1.1.** Путем преобразования цепи (рисунок 1.14) определить ток  $I_2$ , если  $E_1=48 \text{ В}$ ,  $E_2=60 \text{ В}$ , а  $R_1=R_2=R_3=R_4=R_5=R_6=6 \text{ Ом}$ .

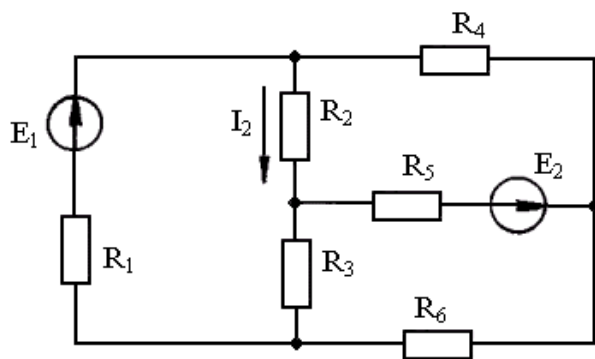


Рисунок 1.14 - Иллюстрация к примеру 1.1

**Решение.** Ветвь с резистором  $R_2$ , в котором следует определить ток  $I_2$ , необходимо сохранять до конца преобразования цепи. Для упрощения схемы следует осуществить эквивалентную замену активного треугольника резисторов  $R_3, R_5, R_6$  звездой (рисунок 1.15). Треугольник резисторов  $R_2, R_4, R_5$  нецелесообразно преобразовывать в звезду, так как в этом случае исчезает ветвь с резистором  $R_2$ , в котором течет искомый ток  $I_2$ . Так как сопротивления сторон треугольника равны между собой, то и сопротивления лучей звезды будут одинаковы и определяются как

$$R_7 = R_8 = R_9 = \frac{R_3 \cdot R_5}{R_3 + R_6 + R_5} = \frac{6 \cdot 6}{6 + 6 + 6} = \frac{36}{18} = 2 \text{ Ом.}$$

Э.д.с. в лучах звезды:

$$E_7 = \frac{E_2 \cdot R_7}{R_5} = E_8 = \frac{E_2 \cdot R_8}{R_5} = \frac{60 \cdot 2}{6} = 20 \text{ В.}$$

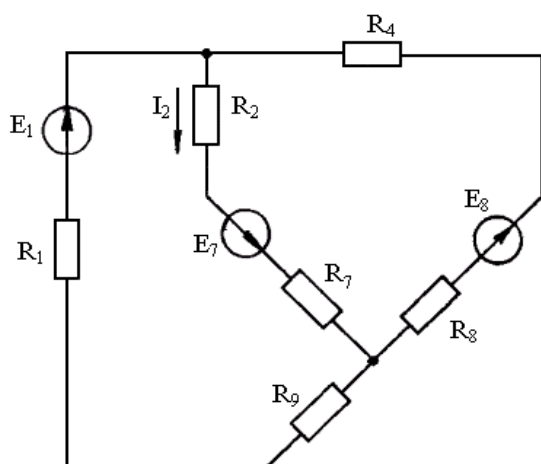


Рисунок 1.15 - Замена активного треугольника резисторов  $R_3R_5R_6$  эквивалентной звездой

В параллельных ветвях схемы рисунка 1.15 последовательно соединенные резисторы преобразовываем до эквивалентных (рисунок 1.16,а).

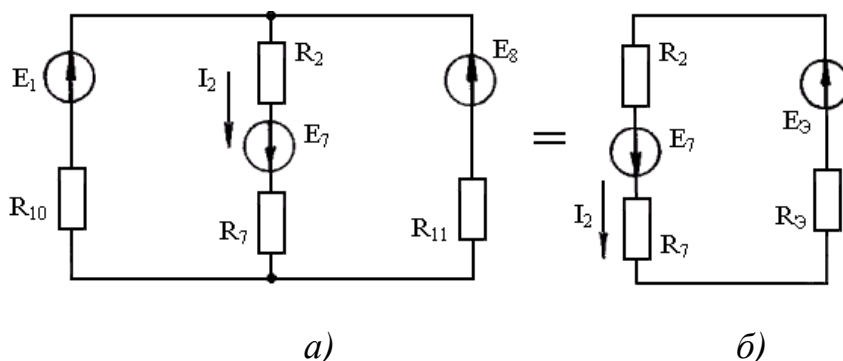


Рисунок 1.16 - Замена параллельных ветвей одной эквивалентной

В этой схеме:  $R_{10} = R_1 + R_9 = 6 + 2 = 8 \text{ Ом}$ , а  $R_{11} = R_4 + R_8 = 6 + 2 = 8 \text{ Ом}$ .

Параллельные ветви  $E_1, R_{10}$  и  $E_8, R_{11}$  заменяем эквивалентной (рисунок 1.16,б) с параметрами:



$$E_3 = \frac{\frac{E_1}{R_{10}} + \frac{E_8}{R_{11}}}{\frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{R_{11}}} = \frac{\frac{48}{8} + \frac{20}{8}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = \frac{68}{2} = 34 \text{ В.}$$

$$R_3 = \frac{R_{10} \cdot R_{11}}{R_{10} + R_{11}} = \frac{8 \cdot 8}{8 + 8} = 4 \text{ Ом.}$$

Искомый ток  $I_2$  определяется:

$$I_2 = \frac{E_7 + E_3}{R_2 + R_7 + R_3} = \frac{20 + 34}{6 + 2 + 4} = \frac{54}{12} = 4,5 \text{ А.}$$

### 1.3. Методы расчета линейных электрических цепей постоянного тока

Расчет электрических цепей с источниками постоянного тока проще, чем цепей с источниками синусоидального напряжения или э.д.с. произвольной формы. Поэтому предпочтительней начать рассмотрение расчетов цепей постоянного тока. К тому же методы расчета цепей постоянного тока могут быть использованы для цепей с переменными напряжениями. Расчет электрической цепи обычно заключается в нахождении токов в ветвях при заданных значениях сопротивлений резисторов, известных э.д.с. или токов источников тока.

#### 1.3.1. Расчет разветвленной цепи постоянного тока с одним источником электрической энергии

Примером такой цепи может быть цепь, представленная на рисунке 1.2,а. При расчете подобных цепей сначала преобразовывают всю пассивную часть схемы до одного эквивалентного резистора относительно зажимов источника э.д.с., а затем по закону Ома определяется ток через источник э.д.с. и, при необходимости, токи в ветвях пассивной части схемы. Рассмотрим расчет цепи с одной э.д.с. на конкретном примере.

**Пример 1.2.** Определить токи в ветвях схемы (рисунок 1.17,а), если  $E=10 \text{ В}$ , а  $R_1=4 \text{ Ом}$ ,  $R_2=10 \text{ Ом}$ ,  $R_3=15 \text{ Ом}$ .

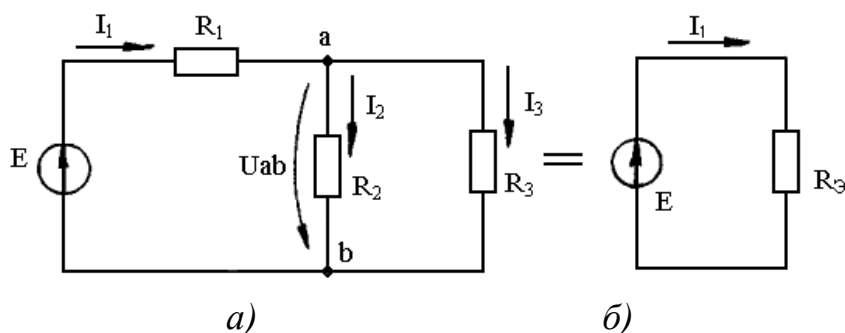


Рисунок 1.17 - Схема замещения электрической цепи с одним источником электрической энергии

**Решение.** Предварительно выбирают положительные направления токов в ветвях и проставляют стрелками на схеме. Так как в цепи действует одна э.д.с., то направление токов в ветвях очевидно, т.е. по направлению действия э.д.с. Затем преобразовывают пассивную часть схемы ( $R_1, R_2, R_3$ ) до эквивалентного резистора  $R_э$ , значение которого определится:

$$R_э = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 4 + \frac{10 \cdot 15}{10 + 15} = 4 + \frac{150}{25} = 4 + 6 = 10 \text{ Ом.}$$

По закону Ома определяется ток  $I_1$ :

$$I_1 = \frac{E}{R_э} = \frac{10}{10} = 1 \text{ А.}$$

Возвращаясь к исходной схеме (рисунок 1.17,а) и пользуясь формулой (1.10), определяют ток  $I_2$ :

$$I_2 = \frac{I_1 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{1 \cdot 15}{10 + 15} = \frac{15}{25} = 0,6 \text{ А.}$$

Ток во второй параллельной ветви  $I_3$  можно определить аналогично:

$$I_3 = \frac{I_1 \cdot R_2}{R_2 + R_3} = \frac{1 \cdot 10}{10 + 15} = \frac{10}{25} = 0,4 \text{ А}$$

либо по первому закону Кирхгофа для узла  $a$ :

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0, \quad I_3 = I_1 - I_2 = 1 - 0,6 = 0,4 \text{ А.}$$

Токи в параллельных ветвях  $I_2$  и  $I_3$  можно найти и по-другому, определив предварительно напряжение  $U_{ab}$ :

$$U_{ab} = I_1 \cdot R_{ab} = I_1 \frac{R_3 \cdot R_2}{R_3 + R_2} = \frac{1 \cdot 15 \cdot 10}{15 + 10} = \frac{150}{25} = 6 \text{ В,}$$

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2} = \frac{6}{10} = 0,6 \text{ А,} \quad I_3 = \frac{U_{ab}}{R_3} = \frac{6}{15} = 0,4 \text{ А.}$$

Напряжение  $U_{ab}$  можно было бы определить и из уравнения по второму закону Кирхгофа для левого контура схемы рисунка 1.17,а:

$$I_1 \cdot R_1 + U_{ab} = E, \quad U_{ab} = E - I_1 \cdot R_1 = 10 - 1 \cdot 4 = 6 \text{ В.}$$

### 1.3.2. Расчет разветвленных цепей с несколькими источниками электрической энергии

Расчет таких цепей может быть произведен либо путем составления системы уравнений электрического равновесия на основании законов Кирхгофа и последующего решения этой системы, либо с помощью специально разработанных методов расчета. Ниже изложены основные методы расчета сложных линейных электрических цепей.

**1. Метод уравнений Кирхгофа.** Расчет разветвленной цепи с произвольным числом источников электрической энергии путем непосредственного применения уравнений Кирхгофа заключается в составлении системы уравнений для цепи по первому и второму законам

Кирхгофа. Количество уравнений в системе равно числу неизвестных токов, т.е. числу ветвей схемы.

Сначала составляются уравнения по первому закону Кирхгофа, число этих уравнений должно быть на единицу меньше числа узлов рассматриваемой цепи. Оставшиеся уравнения системы составляются по второму закону Кирхгофа. Количество этих уравнений определяется числом ветвей (неизвестных токов) за вычетом числа уравнений, составленных ранее по первому закону Кирхгофа. При этом уравнения составляются для независимых контуров. Независимый контур – контур, отличающийся от ранее рассмотренных хотя бы одним элементом цепи.

Перед расчетом выбирают произвольно положительные направления токов в ветвях и на схеме проставляют стрелки, указывающие эти направления. Если в результате решения системы уравнений ток в ветви получился отрицательным, то это означает, что направление тока в этой ветви противоположно тому, как это показано стрелкой на схеме.

Составим систему уравнений Кирхгофа для расчета цепи, изображенной на рисунке 1.18. Так как в цепи четыре узла, то по первому закону следует составить уравнения для любых трех узлов. Допустим, для узлов *A*, *B*, *C*:

$$\begin{aligned} I_6 - I_4 - I_1 &= 0, \\ I_1 - I_2 + I_3 &= 0, \\ I_4 + I_2 + I_5 &= 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

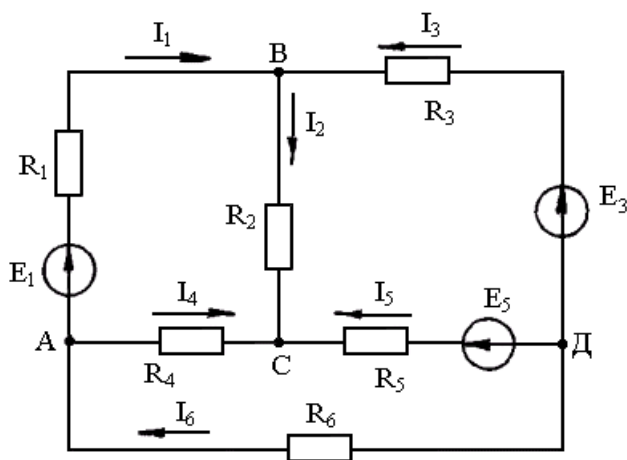


Рисунок 1.18 - К расчету методом уравнений Кирхгофа

Цепь содержит шесть ветвей (шесть неизвестных токов). Таким образом, три недостающих уравнения составляются по второму закону Кирхгофа. В этой схеме только три независимых контура, хотя вообще контуров больше. Уравнения для контуров *ABCA*, *BCDB*, *ABDA*:

$$\begin{aligned} I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_4 R_4 &= E_1, \\ I_2 R_2 - I_5 R_5 + I_3 R_3 &= E_3 - E_5, \\ I_1 R_1 - I_3 R_3 + I_6 R_6 &= E_1 - E_3. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Если заданы значения сопротивлений всех резисторов и э.д.с., то совместное решение системы из шести составленных уравнений (1.15 и 1.16) позволит найти все шесть неизвестных токов.

**2. Метод контурных токов.** В этом методе считают, что в каждом независимом контуре сложной цепи протекает свой условный, так называемый контурный ток. И система уравнений составляется не для действительных токов в ветвях, а относительно новых неизвестных – контурных токов. Это обстоятельство позволяет сократить число неизвестных токов (уменьшить количество расчетных уравнений в системе) до числа независимых контуров.

Если в схеме (рисунок 1.18) задача определения токов по методу уравнений Кирхгофа сводится к решению системы из шести уравнений, то по методу контурных токов достаточно решить систему из трех уравнений, так как в этой схеме всего три независимых контура.

После вычисления контурных токов нетрудно найти действительные токи в ветвях, как это будет показано ниже, путем составления простых соотношений, в которых токи в ветвях выражаются через найденные контурные токи.

Рассмотрим расчет токов в схеме замещения (рисунок 1.19) методом контурных токов, в которой известны значения сопротивлений резисторов и э.д.с.

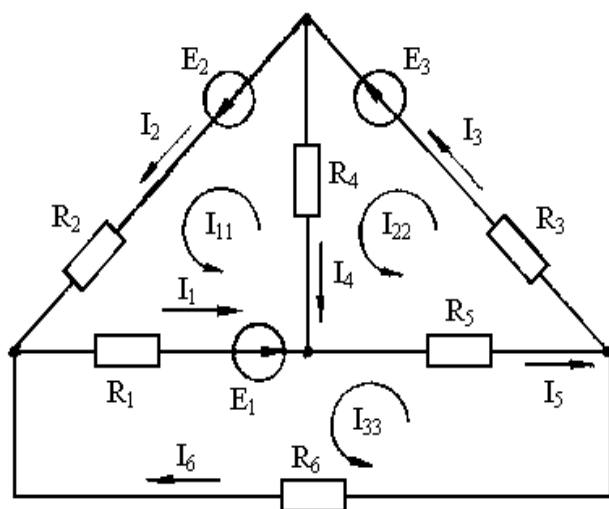


Рисунок 1.19 - Иллюстрация к методу контурных токов

Сначала выбираются и проставляются на схеме стрелками положительные направления токов в ветвях и направление контурных токов  $I_{11}$ ,  $I_{22}$  и  $I_{33}$  (дугowymi стрелками), а затем составляются уравнения для контурных токов. Структура записи эти уравнений следующая.

*Если контурные токи направить в одном направлении, то в уравнении для контура в левой части его записывается со знаком «плюс» произведение контурного тока на сумму сопротивлений резисторов этого контура и со знаком «минус» произведения соседних контурных токов на смежные*

сопротивления между этими контурами. В правой части уравнения записывается алгебраическая сумма э.д.с., действующих в рассматриваемом контуре. Со знаком «плюс» записываются э.д.с., направление действия которых совпадает с выбранным направлением контурного тока. Если э.д.с. направлена противоположно контурному току, то ее записывают со знаком «минус».

Для схемы замещения (рисунок 1.19) электрической цепи выражения для контурных токов запишутся:

$$\begin{aligned} I_{11}(R_1 + R_2 + R_4) - I_{22} \cdot R_4 - I_{33} \cdot R_1 &= E_2 + E_1, \\ I_{22}(R_3 + R_4 + R_5) - I_{11} \cdot R_4 - I_{33} \cdot R_5 &= E_3, \\ I_{33}(R_1 + R_5 + R_6) - I_{22} \cdot R_5 - I_{11} \cdot R_1 &= -E_1. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Решая систему уравнений (1.17), определяют контурные токи  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{33}$ .

Можно направлять контурные токи в контурах в разных направлениях. Тогда в левой части уравнения (1.17) необходимо брать со знаком «плюс» произведение соседнего контурного тока на смежное между этими контурами сопротивление, если контурные токи в нем совпадают по направлению. Если не совпадают, то это произведение записывается с минусом.

Действительные токи в ветвях определяют следующим образом. Токи в крайних ветвях схемы равны соответствующим контурным, а в смежных ветвях – алгебраической сумме контурных. При составлении уравнения для тока в смежной ветви с плюсом берется контурный ток, совпадающий по направлению с действительным током в этой ветви. Таким образом, токи в ветвях схемы (рисунок 1.19) определяются:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11} - I_{33}, \quad I_2 = I_{11}, \quad I_3 = I_{22}, \\ I_4 &= I_{22} - I_{11}, \quad I_5 = I_{22} - I_{33}, \quad I_6 = -I_{33}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Если в схеме замещения присутствуют источники тока (рисунок 1.20), то по методу контурных токов полагают, что каждая ветвь с источником тока входит в контур, контурный ток которого известен и равен току источника тока. С учетом этого, уравнения для контурных токов схемы

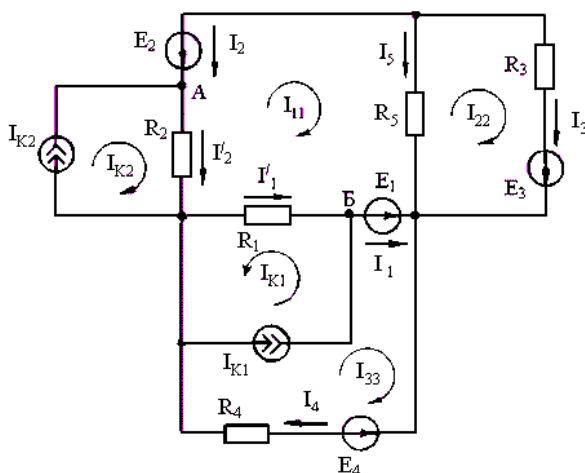


Рисунок 1.20 - Иллюстрация к методу контурных токов в схеме с источниками тока

(рисунок 1.20) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} I_{11}(R_1 + R_2 + R_5) - I_{22}R_5 - I_{33}R_1 - I_{\kappa 2}R_2 + I_{\kappa 1}R_1 &= -E_1 - E_2, \\ I_{22}(R_3 + R_5) - I_{11}R_5 &= E_3, \\ I_{33}(R_1 + R_4) - I_{11}R_1 - I_{\kappa 1} \cdot R_1 &= E_1 - E_4, \end{aligned} \quad (1.19)$$

а токи в ветвях:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{33} - I_{11}, \quad I_1' = I_{33} - I_{11} - I_{\kappa 1}, \\ I_2 &= -I_{11}, \quad I_2' = I_{\kappa 2} - I_{11}, \quad I_3 = I_{22}, \\ I_4 &= I_{33}, \quad I_5 = I_{11} - I_{22}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Можно источники тока (рисунок 1.20) преобразовать в источники э.д.с. (рисунок 1.21) и определить токи в ветвях, воспользовавшись выражениями (1.17) и (1.18), т.е.:

$$\begin{aligned} I_{11}(R_1 + R_2 + R_5) - I_{22} \cdot R_5 - I_{33}R_1 &= E_2' - E_1 - E_2 - E_1', \\ I_{22}(R_5 + R_3) - I_{11}R_5 &= E_3, \\ I_{33}(R_1 + R_4) - I_{11} \cdot R_1 &= E_1 + E_1' - E_4, \\ I_1 &= I_{33} - I_{11}, \quad I_2 = -I_{11}, \quad I_3 = I_{22}, \quad I_4 = I_{33}, \quad I_5 = I_{11} - I_{22}. \end{aligned}$$

В этих уравнениях  $E_1' = I_{\kappa 1} \cdot R_1$ ,  $E_2' = I_{\kappa 2} \cdot R_2$ .

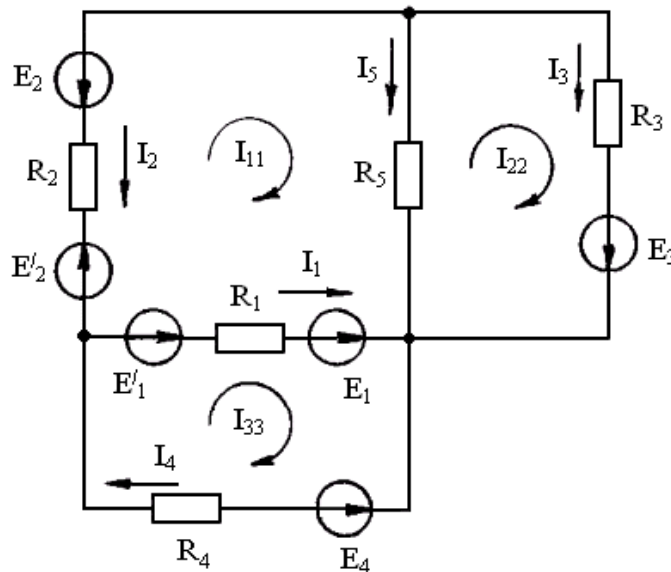


Рисунок 1.21 - Схема замещения с преобразованными источниками тока

Затем, вернувшись к исходной схеме (рисунок 1.20), можно определить оставшиеся неизвестные токи  $I_1'$  и  $I_2'$ , записав уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов А и Б.

$$I_2 + I_{\kappa 2} - I_2' = 0, \text{ откуда } I_2' = I_2 + I_{\kappa 2}, \text{ и } I_1' + I_{\kappa 1} - I_1 = 0, \text{ откуда } I_1' = I_1 - I_{\kappa 1}.$$

Рассмотрим применение метода контурных токов на конкретном примере.

**Пример 1.3.** В схеме замещения цепи постоянного тока (рисунок 1.22) э.д.с. источников  $E_2=36,25 \text{ В}$ ,  $E_3=37,5 \text{ В}$ , сопротивления резисторов  $R_1=15 \text{ Ом}$ ,

$R_2=12,5 \text{ Ом}, R_3=20 \text{ Ом}, R_4=100 \text{ Ом}, R_5=175 \text{ Ом}, R_6=300 \text{ Ом}$ . Рассчитать токи методом контурных токов.

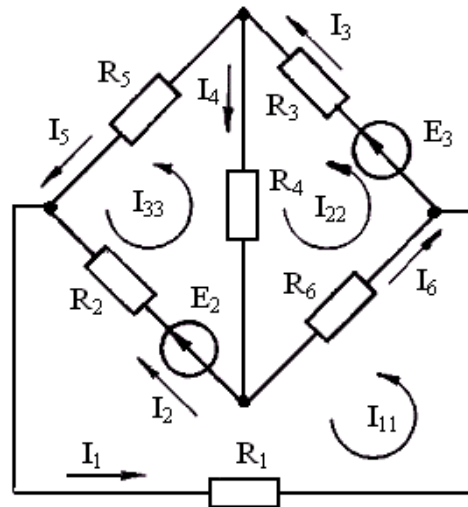


Рисунок 1.22 - Схема замещения цепи для расчета методом контурных токов

**Решение.** Выбираем произвольно направление токов в ветвях и проставляем стрелками на схеме.

В схеме три независимых контура, поэтому будет три контурных тока  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{33}$ . Направим их в контурах одинаково, против часовой стрелки, и в соответствии с (1.17) составляем систему уравнений для контурных токов:

$$\begin{aligned} I_{11}(R_1 + R_2 + R_6) - I_{22}R_6 - I_{33}R_2 &= E_2, \\ I_{22}(R_3 + R_4 + R_6) - I_{11}R_6 - I_{33}R_4 &= E_3, \\ I_{33}(R_2 + R_4 + R_5) - I_{22}R_4 - I_{11}R_2 &= -E_2. \end{aligned}$$

Подставляя числовые значения, будем иметь:

$$\begin{aligned} 327,5I_{11} - 300I_{22} - 12,5I_{33} &= 36,25, \\ -300I_{11} + 420I_{22} - 100I_{33} &= 37,5, \\ -12,5I_{11} - 100I_{22} + 287,5I_{33} &= -36,25. \end{aligned}$$

Решаем полученную систему уравнений методом последовательного исключения неизвестных.

Выразим из первого уравнения ток  $I_{11}$ :

$$I_{11} = \frac{36,25 + 300I_{22} + 12,5I_{33}}{327,5}$$

и, подставив во второе уравнение, получим:

$$\begin{aligned} \frac{-300(36,25 + 300I_{22} + 12,5I_{33})}{327,5} + 420I_{22} - 100I_{33} &= 37,5, \\ -33,206 - 274,809I_{22} - 11,45I_{33} + 420I_{22} - 100I_{33} &= 37,5, \\ 145,191I_{22} - 111,45I_{33} &= 70,706, \end{aligned}$$

$$I_{22} = \frac{70,706 + 111,45I_{33}}{145,191} = 0,487 + 0,7676 I_{33}.$$

Выразим ток  $I_{11}$  через ток  $I_{33}$ :

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{36,25 + 300(0,487 + 0,7676I_{33}) + 12,5I_{33}}{327,5} = \\ &= \frac{36,25 + 146,1 + 242,78I_{33}}{327,5} = 0,7413I_{33} + 0,5568. \end{aligned}$$

Подставив в третье уравнение системы выражения для токов  $I_{11}$  и  $I_{22}$ , определим ток  $I_{33}$ :

$$\begin{aligned} -12,5(0,7413 I_{33} + 0,5568) - 100(0,487 + 0,7676 I_{33}) + 287,5I_{33} &= -36,25, \\ -9,26625 I_{33} - 6,96 - 48,7 - 76,76I_{33} + 287,5I_{33} &= -36,25, \\ 201,4737 I_{33} &= 19,41, \\ I_{33} &= \frac{19,41}{201,4737} = 0,09634 \text{ A}. \end{aligned}$$

Подстановка значения тока  $I_{33}$  в выражения для токов  $I_{11}$  и  $I_{22}$  через  $I_{33}$  позволяет определить эти токи:

$$\begin{aligned} I_{11} &= 0,7413 I_{33} + 0,5568 = 0,7413 \cdot 0,09634 + 0,5568 = 0,62821 \text{ A}, \\ I_{22} &= 0,487 + 0,7676 I_{33} = 0,487 + 0,7676 \cdot 0,09634 = 0,56095 \text{ A}. \end{aligned}$$

Определим действительные токи в ветвях системы. Токи во внешних ветвях равны соответствующим контурным:

$I_1 = I_{11} = 0,62821 \text{ A}$ ,  $I_3 = I_{22} = 0,56095 \text{ A}$ ,  $I_5 = I_{33} = 0,09634 \text{ A}$ , а токи в смежных ветвях определяются алгебраическим суммированием контурных:

$$\begin{aligned} I_2 &= I_{11} - I_{33} = 0,62821 - 0,09634 = 0,53187 \text{ A}, \\ I_4 &= I_{22} - I_{33} = 0,56095 - 0,09634 = 0,46461 \text{ A}, \\ I_6 &= I_{22} - I_{11} = 0,56095 - 0,62821 = -0,06726 \text{ A}. \end{aligned}$$

Ток  $I_6$  в результате расчета получился отрицательным. Это означает, что в действительности ток в шестой ветви протекает противоположно направлению, указанному стрелкой на схеме (рисунок 1.22).

**3. Метод узловых напряжений.** Этот метод также позволяет сократить число расчетных уравнений по сравнению с методом непосредственного применения законов Кирхгофа. В этом методе в качестве вспомогательных неизвестных вводят узловые напряжения, т.е. напряжения между узлами схемы и одним из них, называемым опорным, потенциал которого принимают за нуль. Система уравнений электрического равновесия цепи составляется не относительно неизвестных токов в ветвях, а для узловых напряжений, после нахождения которых токи в ветвях определяются из простых соотношений. Количество расчетных уравнений в системе на единицу меньше числа узлов схемы. Рассмотрим расчет токов методом узловых напряжений в схеме рисунка 1.23.



Порядок расчета следующий. На схеме проставляются направления токов в ветвях и узловые напряжения  $U_{AO}$ ,  $U_{BO}$ ,  $U_{CO}$ . Стрелки узловых напряжений направляют к опорному узлу (в данном случае – узел 0).

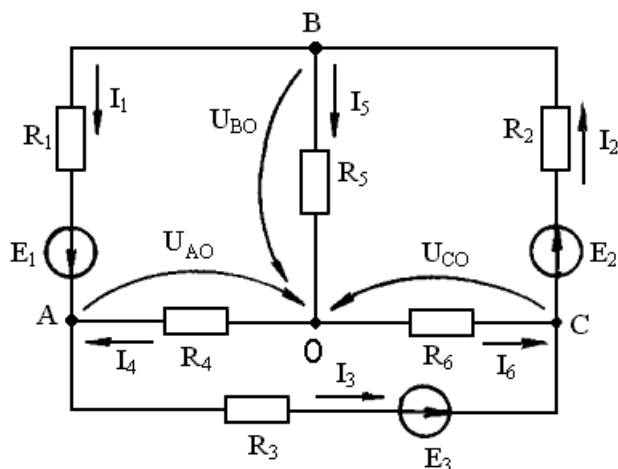


Рисунок 1.23 - Схема замещения для определения токов по методу узловых напряжений

Составляется система уравнений для узловых напряжений. При составлении уравнения необходимо в левой части его взять с плюсом произведение узлового напряжения рассматриваемого узла на арифметическую сумму проводимостей ветвей, сходящихся в этом узле, и с минусом – произведения узловых напряжений соседних узлов на проводимости ветвей, связывающих эти узлы с рассматриваемым узлом. В правой части уравнения записывается алгебраическая сумма произведений э.д.с. на проводимости ветвей, сходящихся в узле, для которого записывается уравнение. При этом указанное произведение записывается со знаком «плюс», если э.д.с. направлена к узлу.

Согласно этому правилу, уравнения для определения узловых напряжений будут иметь вид:

$$\begin{aligned} U_{AO}(g_1 + g_3 + g_4) - U_{BO}g_1 - U_{CO}g_3 &= E_1g_1 - E_3g_3, \\ U_{BO}(g_1 + g_2 + g_5) - U_{AO}g_1 - U_{CO}g_2 &= E_2g_2 - E_1g_1, \\ U_{CO}(g_2 + g_3 + g_6) - U_{AO}g_3 - U_{BO}g_2 &= E_3g_3 - E_2g_2. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Решение системы уравнений (1.21) позволяет определить узловые напряжения  $U_{AO}$ ,  $U_{BO}$ ,  $U_{CO}$ .

Для определения токов в ветвях составляют уравнения по второму закону Кирхгофа. При этом выбирают контур с искомым током и уже найденными узловыми напряжениями. Для определения тока  $I_1$  в схеме (рисунок 1.23) можно записать:

$$I_1R_1 + U_{AO} - U_{BO} = E_1,$$

откуда

$$I_1 = \frac{E_1 + U_{BO} - U_{AO}}{R_1}.$$

Аналогично определяются оставшиеся токи в ветвях:

$$\begin{aligned}
I_2 R_2 + U_{BO} - U_{CO} &= E_2, & I_2 &= \frac{E_2 - U_{BO} + U_{CO}}{R_2}; \\
I_3 R_3 + U_{CO} - U_{AO} &= E_3, & I_3 &= \frac{E_3 + U_{AO} - U_{CO}}{R_3}; \\
I_4 R_4 + U_{AO} &= 0, & I_4 &= -\frac{U_{AO}}{R_4}; \\
I_5 R_5 - U_{BO} &= 0, & I_5 &= \frac{U_{BO}}{R_5}; \\
I_6 R_6 + U_{CO} &= 0, & I_6 &= -\frac{U_{CO}}{R_6}.
\end{aligned}$$

Если в схеме присутствуют ветви с источниками тока, то при составлении уравнений для узловых напряжений левая часть уравнений (1.21) останется без изменения, а в правой части необходимо добавить алгебраическую сумму токов источников тока, сходящихся в рассматриваемом узле. При этом с плюсом записывается ток источника тока, направленного к узлу, для которого составляется уравнение.

Очевидно, что этим методом удобнее пользоваться в том случае, когда число узлов без единицы меньше количества независимых контуров схемы.

Если в схеме два узла и несколько параллельных ветвей, то остается одно узловое напряжение и уравнение (1.21) для узлового напряжения трансформируется в следующую формулу:

$$U = \frac{\sum_{\kappa=1}^n E_{\kappa} \cdot g_{\kappa} + \sum_{\kappa=1}^n I_{\kappa}}{\sum_{\kappa=1}^n g_{\kappa}}, \quad (1.22)$$

где  $I_{\kappa}$  – токи источников тока в схеме.

В этом случае сначала определяют напряжение между двумя узлами  $U$  по формуле (1.22), а затем токи в параллельных ветвях из уравнений по второму закону Кирхгофа, включая в них ветви с искомым током и найденное узловое напряжение  $U$ .

Рассмотренный случай является частным случаем метода узловых напряжений и известен в литературе под названием метода двух узлов. Ниже приведены конкретные примеры расчета токов методом узловых напряжений.

**Пример 1.4.** Определить токи в ветвях схемы (рисунок 1.22) по данным примера 1.3.

**Решение.** Принимаем узел  $K$  за опорный и проставляем стрелки узловых напряжений  $U_{AK}$ ,  $U_{BK}$ ,  $U_{CK}$  (рисунок 1.24). Составляем систему трех уравнений для узловых напряжений.

$$\begin{aligned}
U_{AK} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \right) - U_{BK} \frac{1}{R_5} - U_{CK} \frac{1}{R_1} &= E_2 \frac{1}{R_2}, \\
U_{BK} \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - U_{AK} \frac{1}{R_5} - U_{CK} \frac{1}{R_3} &= E_3 \frac{1}{R_3},
\end{aligned}$$

$$U_{CK} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} \right) - U_{AK} \frac{1}{R_1} - U_{BK} \frac{1}{R_3} = -E_1 \frac{1}{R_3}.$$

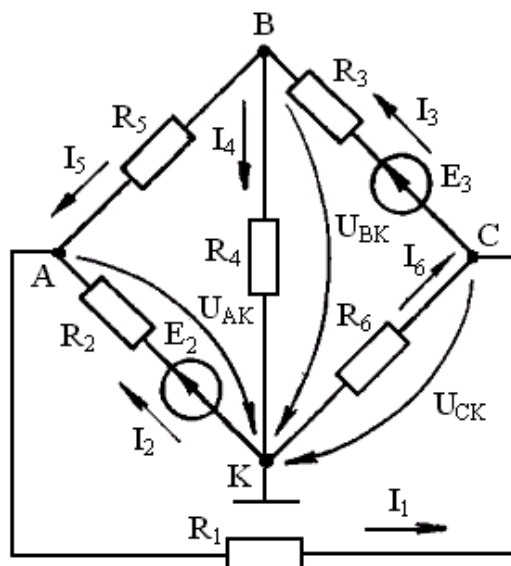


Рисунок 1.24 - Иллюстрация к методу узловых напряжений

После подстановки числовых значений будем иметь:

$$152,38 \cdot 10^{-3} U_{AK} - 5,714 \cdot 10^{-3} U_{BK} - 66,66 \cdot 10^{-3} U_{CK} = 2,9,$$

$$65,714 \cdot 10^{-3} U_{BK} - 5,714 \cdot 10^{-3} U_{AK} - 50 \cdot 10^{-3} U_{CK} = 1,875,$$

$$120 \cdot 10^{-3} U_{CK} - 66,666 \cdot 10^{-3} U_{AK} - 50 \cdot 10^{-3} U_{CK} = -1,875.$$

Совместное решение уравнений этой системы дает значения узловых напряжений:

$$U_{AK} = 29,597 \text{ В}; \quad U_{BK} = 46,454 \text{ В}; \quad U_{CK} = 20,171 \text{ В}.$$

Определяем токи в ветвях:

$$I_1 R_1 + U_{CK} - U_{AK} = 0, \quad I_1 = \frac{U_{AK} - U_{CK}}{R_1} = \frac{29,597 - 20,171}{15} = 0,6284 \text{ А};$$

$$I_2 R_2 + U_{AK} = E_2, \quad I_2 = \frac{E_2 - U_{AK}}{R_2} = \frac{36,25 - 29,597}{12,5} = 0,532 \text{ А};$$

$$I_3 R_3 + U_{BK} - U_{CK} = E_3, \quad I_3 = \frac{E_3 + U_{CK} - U_{BK}}{R_3} = \frac{37,5 + 20,171 - 46,454}{20} = 0,56085 \text{ А};$$

$$I_4 R_4 - U_{BK} = 0, \quad I_4 = \frac{U_{BK}}{R_4} = \frac{46,454}{100} = 0,46454 \text{ А};$$

$$I_5 R_5 + U_{AK} - U_{BK} = 0, \quad I_5 = \frac{U_{BK} - U_{AK}}{R_5} = \frac{46,454 - 29,597}{175} = 0,09633 \text{ А};$$

$$I_6 R_6 + U_{CK} = 0, \quad I_6 = -\frac{U_{CK}}{R_6} = -\frac{20,171}{300} = -0,06724 \text{ А}.$$

Получившиеся в результате расчета значения токов практически такие же, как и при расчете методом контурных токов (см. пример 1.3).

**Пример 1.5.** В схеме (рисунок 1.25) определить токи методом узловых напряжений, если э.д.с.  $E_1=30\text{ В}$ ,  $E_4=100\text{ В}$ , ток источника тока  $I=4\text{ А}$ , а  $R_1=2\text{ Ом}$ ,  $R_2=6\text{ Ом}$ ,  $R_3=2,5\text{ Ом}$ ,  $R_4=10\text{ Ом}$ ,  $R_5=4\text{ Ом}$ ,  $R_6=1\text{ Ом}$ .

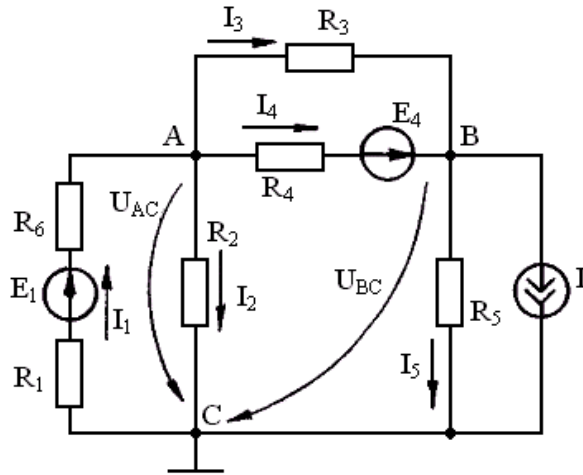


Рисунок 1.25 - Метод узловых напряжений в схеме с источником тока

**Решение.** Принимаем узел С за опорный и проставляем узловые напряжения  $U_{AC}$  и  $U_{BC}$ , а также выбираем направления токов в ветвях.

Составляем систему уравнений для узловых напряжений:

$$U_{AC} \left( \frac{1}{R_1 + R_6} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} \right) - U_{BC} \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = \frac{E_1}{R_1 + R_6} - \frac{E_4}{R_4},$$

$$U_{BC} \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - U_{AC} \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = \frac{E_4}{R_4} - I.$$

После подстановки числовых значений и простых преобразований будем иметь:

$$U_{AC} - 0,5U_{BC} = 0, \quad 0,75U_{BC} - 0,5U_{AC} = 6.$$

Совместное решение уравнений дает значения узловых напряжений:

$$U_{AC} = 6\text{ В}, \quad U_{BC} = 12\text{ В}.$$

Определяем токи в ветвях:

$$I_1(R_1 + R_6) + U_{AC} = E_1, \quad I_1 = \frac{E_1 - U_{AC}}{R_1 + R_6} = \frac{30 - 6}{3} = 8\text{ А}.$$

$$I_2 R_2 - U_{AC} = 0, \quad I_2 = \frac{U_{AC}}{R_2} = \frac{6}{6} = 1\text{ А}.$$

$$I_3 R_3 + U_{BC} - U_{AC} = 0, \quad I_3 = \frac{U_{AC} - U_{BC}}{R_3} = \frac{6 - 12}{2,5} = -2,4\text{ А}.$$

$$I_4 R_4 + U_{BC} - U_{AC} = E_4, \quad I_4 = \frac{U_{AC} - U_{BC} + E_4}{R_4} = \frac{6 - 12 + 100}{10} = 9,4\text{ А}.$$

$$I_5 R_5 - U_{BC} = 0, \quad I_5 = \frac{U_{BC}}{R_5} = \frac{12}{4} = 3 \text{ A.}$$

Проверку решения можно осуществить с помощью уравнения по первому закону Кирхгофа для узла В:

$$\begin{aligned} I_3 + I_4 - I_5 - I &= 0, & I_3 + I_4 &= I_5 + I, \\ -2,4 + 9,4 &= 3 + 4, & 7 &= 7. \end{aligned}$$

**Пример 1.6.** Определить токи в схеме (рисунок 1.26), если э.д.с.  $E_1=25\text{В}$ ,  $E_2=10\text{В}$ ,  $R_1=2\text{Ом}$ ,  $R_2=3\text{Ом}$ , а ток источника тока  $I=5\text{ А}$ .

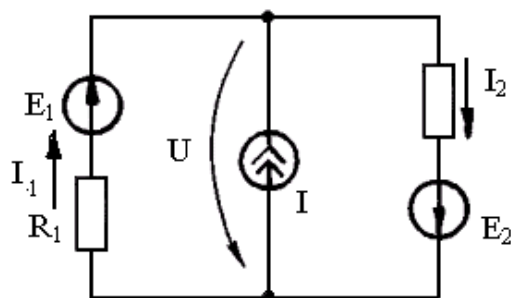


Рисунок 1.26 - Иллюстрация к примеру 1.6

**Решение.** Так как в схеме два узла, то будет одно узловое напряжение, которое в соответствии с формулой (1.22) запишется:

$$U = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + I}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{\frac{25}{2} - \frac{10}{3} + 5}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 17 \text{ В.}$$

Токи в ветвях:

$$I_1 R_1 + U = E_1, \quad I_1 = \frac{E_1 - U}{R_1} = \frac{25 - 17}{2} = 4 \text{ A.}$$

$$I_2 R_2 - U = E_2, \quad I_2 = \frac{E_2 + U}{R_2} = \frac{10 + 17}{3} = 9 \text{ A.}$$

**4. Метод наложения.** Основан на принципе независимости действия э.д.с., который может быть сформулирован следующим образом: *если в линейной разветвленной цепи действует несколько источников электрической энергии, то ток в каждой ветви равен алгебраической сумме токов, вызываемых в этой ветви каждым источником в отдельности.* Другими словами, любой из источников создает в каждой ветви цепи такие токи, которые он создавал, если бы отсутствовали в этой цепи другие источники, т.е. источники электрической энергии действуют независимо друг от друга.

Это обстоятельство позволяет рассчитывать токи в ветвях линейной цепи от действия каждой э.д.с. в отдельности и алгебраически их суммировать. Для

этого исходную схему разбивают на подсхемы (по числу действующих в цепи источников), в каждой из которых оставляют только по одному источнику электрической энергии. При этом остальные источники э.д.с. в этих подсхемах приравнивают к нулю, если есть их внутренние сопротивления, то они сохраняются в тех же ветвях; ветви с источниками тока размыкаются. Затем проводят расчет каждой подсхемы, в результате чего находят токи (частичные) во всех ветвях от действия каждого источника энергии в отдельности. Линейная цепь позволяет просуммировать частичные токи и получить действительные токи в ветвях исходной схемы. Это и есть принцип наложения, которым можно пользоваться только в линейных цепях.

Допустим, в схеме (рисунок 1.27) известны все э.д.с. и значения сопротивлений резисторов,  $R_{02}$  – внутреннее сопротивление источника э.д.с.  $E_2$ .

Так как в исходной схеме две э.д.с., то ее представляем в виде двух подсхем. В подсхеме А оставляем э.д.с.  $E_1$ , а вместо э.д.с.  $E_2$  оставляем внутреннее сопротивление  $R_{02}$ . В подсхеме В действует только э.д.с.  $E_2$ .

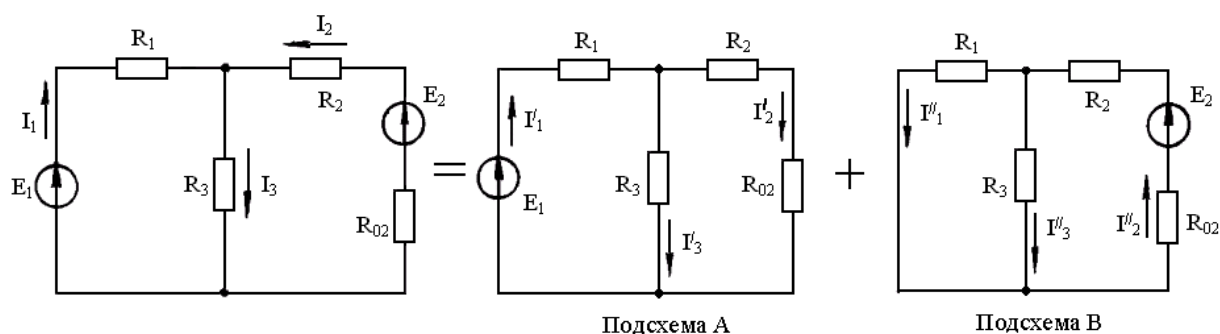


Рисунок 1.27 - К расчету методом наложения

Расставляются направления токов в подсхемах. Токи, обозначенные одним штрихом - это токи в ветвях от действия э.д.с.  $E_1$ , а токи с двумя штрихами – токи от действия э.д.с.  $E_2$ .

Расчет токов в подсхемах аналогичен расчету, изложенному в разделе 1.3.1.

Расчет токов подсхемы А:

$$I_1' = \frac{E_1}{R_9'}, \quad \text{где} \quad R_9' = \frac{(R_2 + R_{02})R_3}{R_2 + R_{02} + R_3} + R_1,$$

$$I_3' = \frac{I_1'(R_2 + R_{02})}{R_2 + R_{02} + R_3}, \quad I_2' = I_1' - I_3'.$$

Аналогично определяются токи в подсхеме В:

$$I_2'' = \frac{E_2}{R_9''}, \quad \text{где} \quad R_9'' = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} + R_2 + R_{02},$$

$$I_1'' = \frac{I_2'' \cdot R_3}{R_1 + R_3}, \quad I_3'' = I_2'' + I_1''.$$

После этого определяются действительные токи в ветвях. При составлении уравнений для токов в ветвях необходимо *частичный ток*,

совпадающий по направлению с током в этой ветви, брать со знаком «плюс», не совпадающий – с минусом. Так, ток  $I_1$  состоит (рисунок 1.27) из токов  $I'_1$  и  $I''_1$ , ток  $I''_1$  направлен противоположно току  $I_1$ , поэтому его в уравнении нужно взять с минусом, а ток  $I'_1$  – со знаком «плюс», как совпадающий по направлению с током  $I_1$ , т.е.:  $I_1 = I'_1 - I''_1$ .

Аналогично определяются оставшиеся токи:

$$I_2 = I'_2 - I''_2,$$

$$I_3 = I'_3 + I''_3.$$

Рассмотрим применение метода наложения на конкретном примере.

**Пример 1.7.** Пусть в схеме (рисунок 1.28, а) необходимо

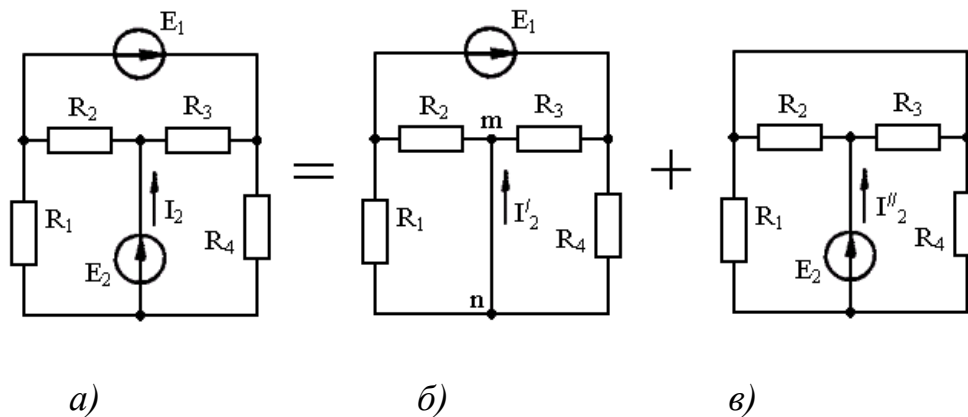


Рисунок 1.28 - Схема замещения к примеру 1.7

определить ток  $I_2$ , если  $E_1=100\text{ В}$ ,  $E_2=50\text{ В}$ , а  $R_1=R_2=R_3=R_4=10\text{ Ом}$ .

**Решение.** Так как в схеме (рисунок 1.28,а) действуют две э.д.с., то ее разбиваем на две подсхемы, в одной из них (рисунок 1.28,б) действует только э.д.с.  $E_1$ , а в другой – э.д.с.  $E_2$  (рисунок 1.28,в).

Ток  $I_2$  от действия  $E_1$  равен нулю, так как точки  $m$  и  $n$  равнопотенциальные, вследствие того, что все резисторы имеют одинаковое сопротивление и по параллельным ветвям протекают равные токи.

Ток  $I''_2$ , вызванный действием только э.д.с.  $E_2$ , определится:

$$I''_2 = \frac{E_2}{R''_2} = \frac{50}{10} = 5\text{ А},$$

где  $R''_2 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + \frac{R_1 \cdot R_4}{R_1 + R_4} = 10\text{ Ом}$ .

Искомый ток  $I_2$  в соответствии с методом наложения определится:

$$I_2 = I'_2 + I''_2 = 5\text{ А}.$$

**5. Метод эквивалентного генератора.** Этот метод удобнее применять в том случае, когда необходимо определить ток в одной ветви сложной электрической цепи. В основу этого метода положена так называемая теорема об эквивалентном генераторе. Она формулируется следующим образом: *ток в любой ветви линейной разветвленной электрической цепи не изменится, если*

всю оставшуюся часть цепи заменить эквивалентным генератором, представляющим собой ветвь с последовательно соединенными источником э.д.с.  $E_r$  и резистором  $R_r$ . Э.д.с. эквивалентного генератора равна напряжению на зажимах разомкнутой ветви (напряжению холостого хода,  $E_r = U_{xx}$ ), а сопротивление генератора  $R_r$  равно эквивалентному сопротивлению оставшейся части схемы относительно зажимов разомкнутой ветви ( $R_r = R_3$ ). Покажем это.

Выделим ветвь с резистором  $R$  (рисунок 1.29,а), в котором протекает ток  $I$ , а оставшуюся часть схемы заключим в прямоугольник (активный двухполюсник). Конфигурация цепи, заключенной в этом прямоугольнике, значения э.д.с. и сопротивлений резисторов известны.

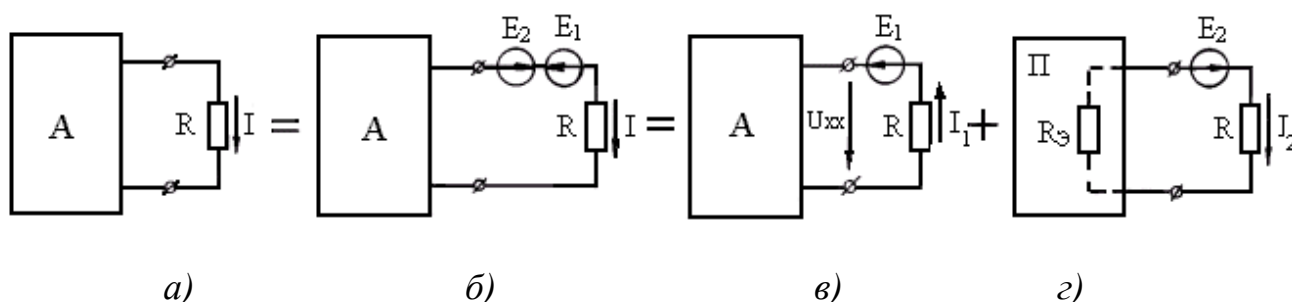


Рисунок 1.29 - К доказательству теоремы об эквивалентном генераторе

Ток  $I$  не изменится, если в ветвь ввести две одинаковые э.д.с.  $E_1 = E_2$  (рисунок 1.29,б), действующие напротив друг друга, так как они будут в этой ветви вызывать одинаковые и противоположно направленные токи, которые взаимно компенсируются.

Разобьем схему (рисунок 1.29,б) на две подсхемы, в одной из которых (рисунок 1.29,в) оставим э.д.с.  $E_1$  и все э.д.с. активного двухполюсника, а в другой – э.д.с.  $E_2$ , (рисунок 1.29,г). При этом в прямоугольнике заключен пассивный двухполюсник.

В соответствии с методом наложения можно записать:

$$I = I_2 - I_1,$$

где  $I_1$  – ток, вызванный всеми э.д.с. цепи и э.д.с.  $E_1$ , а ток  $I_2$  вызван действием только э.д.с.  $E_2$ .

Если значение э.д.с.  $E_1$  выбрать такой величины, чтобы  $I_1 = 0$ , то тогда можно записать:

$$I = I_2 = \frac{E_2}{R_3 + R}, \quad (1.23)$$

где  $R_3$  – эквивалентное сопротивление пассивной цепи, сосредоточенной в пределах прямоугольника (рисунок 1.29,г).

При  $I_1 = 0$  цепь (рисунок 1.29,в) работает в режиме холостого хода, а на зажимах активного двухполюсника будет напряжение холостого хода  $U_{xx}$ . Для этой цепи можно записать:

$$I_1 R + U_{xx} = E_1.$$

Ток  $I_1$  из этого уравнения:



$$I_1 = \frac{E_1 - U_{xx}}{R}.$$

Для того, чтобы ток  $I_1=0$ , должно соблюдаться условие  $E_1=U_{xx}$ . Так как  $E_1=E_2$ , то и э.д.с.  $E_2=U_{xx}$ . Тогда, согласно формуле (1.23), ток в выделенной ветви:

$$I = \frac{U_{xx}}{R_0 + R}. \quad (1.24)$$

Формуле (1.24) соответствует схема замещения, представления на рисунке 1.30.

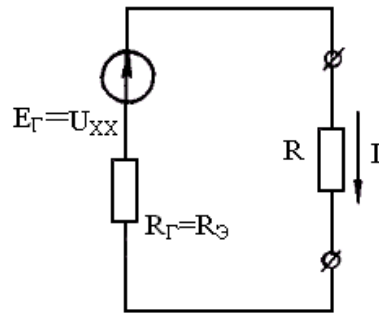


Рисунок 1.30 - Эквивалентный генератор

Если сравнить полученную схему с исходной (рисунок 1.29,а), то можно сделать вывод, что электрическую цепь, которая была заключена в прямоугольнике, можно заменить эквивалентным генератором с э.д.с.  $E_Г=U_{xx}$  и внутренним сопротивлением  $R_Г=R_0$ . Отсюда и название метода расчета.

При расчете методом эквивалентного генератора сначала исключают из схемы резистор, в котором необходимо найти ток, и любым известным методом определяется напряжение ( $U_{xx}$ ) между точками, где он был подключен. Затем определяют эквивалентное сопротивление оставшейся части схемы  $R_Г=R_0$  относительно точек присоединения исключенного резистора. При этом э.д.с. приравниваются к нулю, а если есть внутренние сопротивления, то они остаются в схеме. Ветви с источниками тока размыкаются. По формуле (1.24) определяют интересующий ток.

Эквивалентный генератор можно представить и параллельной схемой с источником тока  $I_Г$  (рисунок 1.31,в). Ток  $I$  в резисторе  $R$  из схемы (рисунок 1.31, в) определяется:

$$I = \frac{I_Г \cdot R_Г}{R_Г + R} = \frac{I_Г}{1 + \frac{R}{R_Г}}, \quad (1.25)$$

где  $I_Г = \frac{E_Г}{R_Г}$  представляет собой ток в ветви с резистором  $R$  (рисунок 1.31,б), замкнутым накоротко, т.е. ток короткого замыкания в ветви, в которой определяется ток.

Последовательность расчета в этом случае отличается тем, что вместо напряжения холостого хода  $U_{xx}$  определяют ток короткозамкнутой ветви с резистором  $R$ .

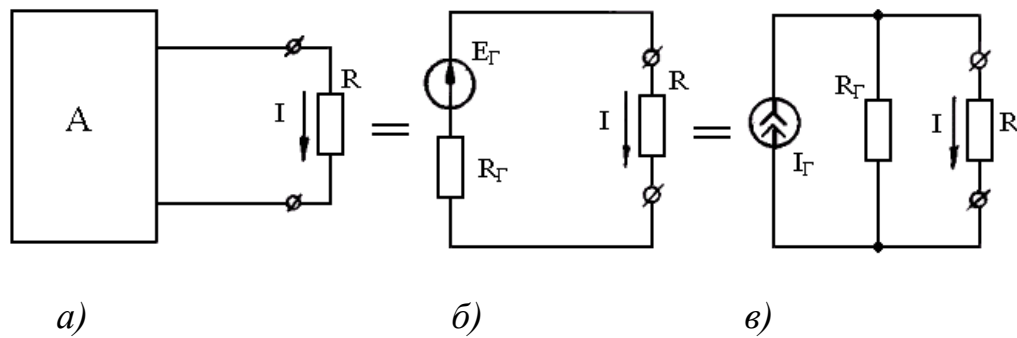


Рисунок 1.31 - К методу эквивалентного генератора с источником тока

**Пример 1.8.** Методом эквивалентного генератора определить ток  $I_1$  в схеме (рисунок 1.22) по данным примера 1.3.

**Решение.** В соответствии с формулой (1.24) для тока  $I_1$  можно записать выражение:

$$I_1 = \frac{E_r}{R_r + R_1}.$$

Схема для определения э.д.с. эквивалентного генератора  $E_r = U_{xx}$  можно получить из исходной схемы (рисунок 1.22), убрав резистор  $R_1$  и поставив на место его стрелку напряжения холостого хода, направление которой совпадает с направлением тока в ветви (рисунок 1.32).

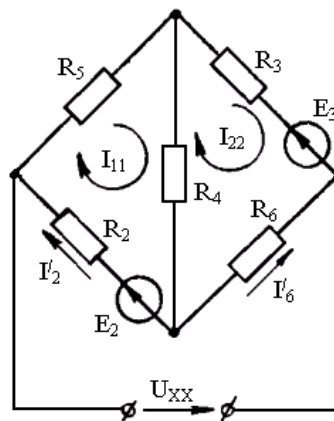


Рисунок 1.32 - Схема замещения для определения э.д.с.  $E_r$

Для определения э.д.с. эквивалентного генератора следует составить уравнение по второму закону Кирхгофа для контура, в который входит напряжение  $U_{xx}$ . Для данного примера будем иметь:

$$U_{xx} - I_6' R_6 + I_2' R_2 = E_2, \quad \text{откуда:}$$

$$U_{xx} = E_2 - I_2' R_2 + I_6' R_6. \quad (1.26)$$

Неизвестные токи  $I'_2$  и  $I'_6$  можно определить методом контурных токов. Система уравнений для контурных токов имеет вид:

$$\begin{aligned} I_{11}(R_2+R_4+R_5)-I_{22}R_4 &= E_2, \\ I_{22}(R_3+R_4+R_6)-I_{11}R_4 &= -E_3. \end{aligned}$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$\begin{aligned} 287,5 I_{11}-100 I_{22} &= 36,25, \\ 420 I_{22}-100 I_{11} &= -37,5. \end{aligned}$$

Совместное решение системы уравнений дает следующие значения контурных токов:

$$I_{11} = 0,1036 \text{ A}, \quad I_{22} = -0,0646 \text{ A}.$$

Токи  $I'_2$  и  $I'_6$ , необходимые для нахождения напряжения холостого хода (1.26), определяются:

$$I'_2 = I_{11} = 0,1036 \text{ A}, \quad I'_6 = -I_{22} = 0,0646 \text{ A}.$$

Э.д.с. эквивалентного генератора  $E_r = U_{xx}$  в соответствии с уравнением (1.26) определится:

$$E_r = U_{xx} = 36,25 - 0,1036 \cdot 12,5 + 0,0646 \cdot 300 = 54,34 \text{ В}.$$

Схему для определения  $R_r$  можно получить из исходной схемы (рисунок 1.22), отключив в ней резистор  $R_1$ , а э.д.с. приравнять к нулю (рисунок 1.33,а). Для определения  $R_r$  необходимо «свернуть» схему (рисунок 1.33,а) до одного эквивалентного резистора (рисунок 1.33,в), предварительно преобразовав треугольник резисторов  $R_3, R_4, R_6$  в эквивалентную звезду  $R_a, R_b, R_c$  (рисунок 1.33,б).

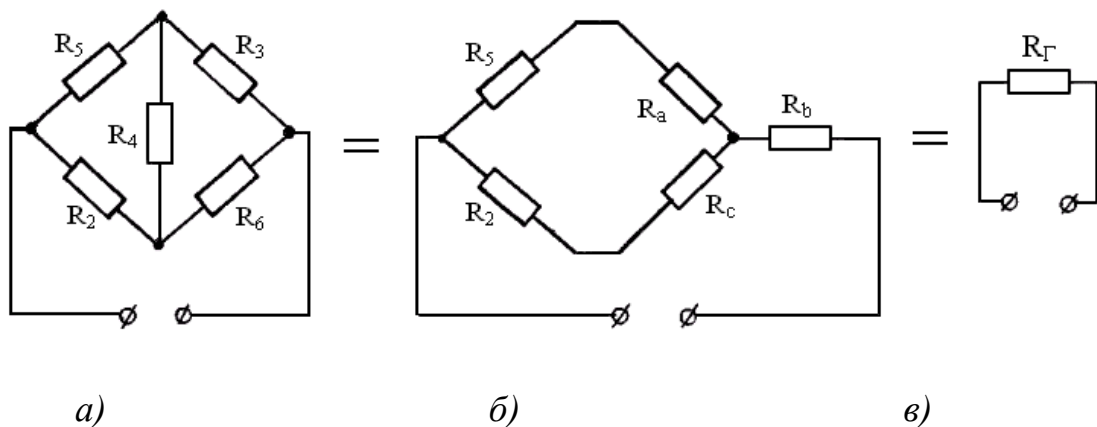


Рисунок 1.33 - Схема для определения сопротивления эквивалентного генератора

Сопротивления резисторов лучей звезды:

$$\begin{aligned} R_a &= \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4 + R_6} = \frac{20 \cdot 100}{20 + 100 + 300} \cdot \frac{2000}{420} = 4,762 \text{ Ом}, \\ R_b &= \frac{R_3 \cdot R_6}{R_3 + R_4 + R_6} = \frac{20 \cdot 300}{420} = 14,286 \text{ Ом}, \end{aligned}$$

$$R_c = \frac{R_4 \cdot R_6}{R_3 + R_4 + R_6} = \frac{100 \cdot 300}{420} = 71,428 \text{ Ом.}$$

Сопротивление эквивалентного генератора  $R_r$  определится:

$$R_r = \frac{(R_5 + R_a)(R_2 + R_c)}{R_5 + R_a + R_2 + R_c} + R_b = 71,501 \text{ Ом.}$$

По формуле (1.24) определяется ток  $I_I$ :

$$I_1 = \frac{E_r}{R_r + R_1} = \frac{54,34}{71,501 + 15} = 0,6282 \text{ А.}$$

**Пример 1.9.** В схеме замещения электрической цепи (рисунок 1.34,а) определить ток  $I_I$  методом эквивалентного источника тока, если  $E_1=26 \text{ В}$ ,  $E_2=10 \text{ В}$ ,  $R_1=2 \text{ Ом}$ ,  $R_2=3 \text{ Ом}$ , а значение тока источника тока  $I=5 \text{ А}$ .

**Решение.** В соответствии с формулой (1.25) ток  $I_I$  можно определить:

$$I_1 = \frac{I_r}{1 + \frac{R_1}{R_r}}.$$

Для нахождения тока  $I_r$  необходимо замкнуть резистор  $R_1$  (рисунок 1.34,б), а источник тока  $I$  преобразовать в источник э.д.с. (рисунок 1.34,в). В этой схеме  $E_2' = I \cdot R_2 = 5 \cdot 3 = 15 \text{ В}$ . Ток  $I_r$  определится из уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$I_r \cdot R_2 = E_1 + E_2 - E_2',$$

$$I_r = \frac{E_1 + E_2 - E_2'}{R_2} = \frac{26 + 10 - 15}{3} = 7 \text{ А.}$$

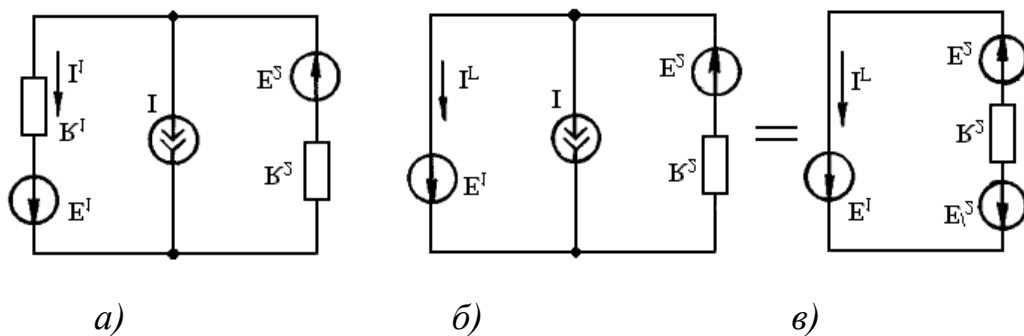


Рисунок 1.34 - К расчету методом эквивалентного источника тока

Сопротивление эквивалентного генератора  $R_r$  – это сопротивление схемы (рисунок 1.34,а) относительно зажимов резистора  $R_1$ , где он был подключен, при замкнутых э.д.с.  $E_1$  и  $E_2$  и разомкнутой ветви источника тока  $I$ .

$R_r = R_2 = 3 \text{ Ом}$ .

Определяем ток  $I_I$ :

$$I_1 = \frac{I_r}{1 + \frac{R_1}{R_r}} = \frac{7}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{7 \cdot 3}{3 + 2} = \frac{21}{5} = 4,2 \text{ А.}$$

Если рассчитывать ток  $I_1$  методом эквивалентного источника напряжения, то

$$I_1 = \frac{E_r = U_{xx}}{R_r + R_1}.$$

Схема для определения напряжения холостого хода представлена на рисунке 1.35.

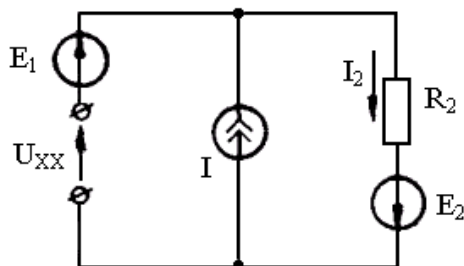


Рисунок 1.35 - Схема для определения напряжения холостого хода

Обойдя внешний контур, получим:

$$U_{xx} + I_2 R_2 = E_2 + E_1,$$

$$U_{xx} = E_1 + E_2 - I_2 R_2, \text{ или}$$

$$U_{xx} = E_1 + E_2 - I \cdot R_2 = 26 + 10 - 5 \cdot 3 = 21 \text{ В.}$$

Ток  $I_2$  равен току источника тока  $I$ , так как первая ветвь разомкнута, а внутреннее сопротивление источника тока бесконечно большое, т.е. ток во внешней цепи равен току источника тока.

Определяем ток  $I_1$ :

$$I_1 = \frac{U_{xx}}{R_r + R_1} = \frac{21}{3 + 2} = 4,2 \text{ А.}$$

Результат расчета этого примера можно проверить методом наложения, определив токи (частичные) в первой ветви от действия каждого источника электрической энергии в отдельности.

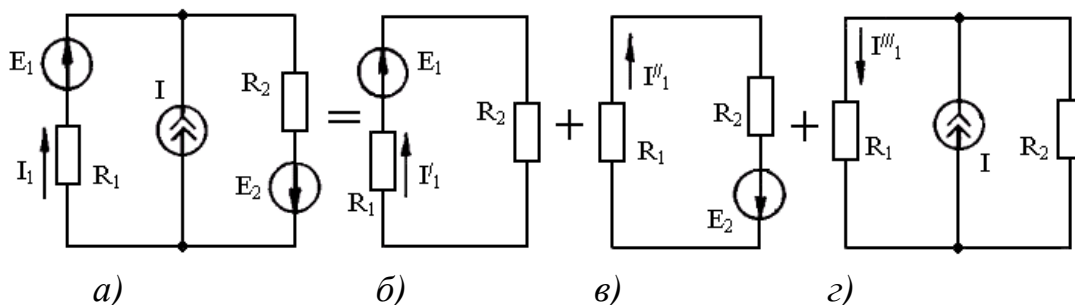


Рисунок 1.36 - К определению тока  $I_1$  методом наложения

Ток в первой ветви от действия только э.д.с.  $E_1$  (рисунок 1.36,б) определится:

$$I_1' = \frac{E_1}{R_1 + R_2} = \frac{26}{2 + 3} = 5,2 \text{ А.}$$

Ток в этой ветви от действия э.д.с.  $E_2$  (рисунок 1.36,в):

$$I_1'' = \frac{E_2}{R_1 + R_2} = \frac{10}{3 + 2} = 2 \text{ А.}$$

В этих подсхемах источник тока  $I$  отсутствует, так как при составлении подсхем, как было указано выше, ветви с источниками тока размыкаются.

Ток в первой ветви от действия источника тока (рисунок 1.36,г) может быть определен по правилу параллельных ветвей на основании формулы (1.10):

$$I_1''' = \frac{I \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{5 \cdot 3}{5 + 3} = \frac{15}{8} = 1,875 \text{ А.}$$

Ток  $I_1$  определяется как алгебраическая сумма частичных токов:

$$I_1 = I_1' + I_1'' - I_1''' = 5,2 + 2 - 1,875 = 5,525 \text{ А.}$$

**6. Баланс мощностей.** Универсальной проверкой расчета токов электрических цепей является баланс мощностей.

Протекание токов по резисторам сопровождается выделением тепла. На основании закона сохранения энергии количество тепла, выделяющегося в единицу времени в резисторах схемы, должно равняться энергии, доставляемой за то же время источниками питания.

$$\sum_{k=1}^n E_k I_k = \sum_{k=1}^n R_k I_k^2, \quad (1.26)$$

или  $P_u = P_n$ .

Равенство (1.26) называется энергетическим балансом в электрических цепях или балансом мощностей. Оно справедливо, если цепь питается только от источников э.д.с.

В данном равенстве мощность источников электрической энергии  $P_u = \sum_{k=1}^n E_k I_k$  – алгебраическая сумма мощностей, развиваемых этими источниками, а  $P_n = \sum_{k=1}^n I_k^2 R_k$  – арифметическая сумма мощностей, выделяющихся в резисторах схемы.

Произведение  $E_k \cdot I_k$  в равенстве (1.26) может иметь как знак «плюс», так и знак «минус». Если через источник э.д.с.  $E_k$  течет ток, который совпадает с направлением действия э.д.с., то источник доставляет в цепь энергию и тогда произведение  $E_k \cdot I_k$  входит в равенство (1.26) с положительным знаком. Если ток направлен встречно э.д.с.  $E_k$ , то источник не поставляет энергию, а потребляет ее. Тогда произведение  $E_k \cdot I_k$  входит в это равенство с отрицательным знаком. В этом случае источник работает в режиме потребителя, т.е. является приемником электрической энергии.

**Пример 1.10.** Составим баланс мощностей по результатам расчета токов в примере 1.3.

**Решение.** Мощность, поступающая в схему от источников э.д.с.:

$$P_u = E_2 I_2 + E_3 I_3 = 36,25 \cdot 0,53187 + 37,5 \cdot 0,56095 = 40,316 \text{ Вт.}$$

Мощность, потребленная схемой:

$$\begin{aligned} P_n &= I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 = \\ &= 0,62821^2 \cdot 15 + 0,53187^2 \cdot 12,5 + 0,56095^2 \cdot 20 + \\ &+ 0,46461^2 \cdot 100 + 0,09634^2 \cdot 175 + 0,06726^2 \cdot 300 = \\ &= 5,9197 + 3,53607 + 6,2933 + 21,5862 + 1,6242 + \\ &+ 1,35717 = 40,3167 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

Погрешность расчета можно оценить по формуле:

$$\Delta P\% = \left| \frac{P_u - P_n}{P_u} \right| \cdot 100 = \frac{40,316 - 40,3167}{40,316} \cdot 100 = 0,00214\%.$$

Погрешность расчетов вполне приемлема для инженерных расчетов.

**7. Потенциальная диаграмма.** Под потенциальной диаграммой понимают график распределения потенциала вдоль любого замкнутого контура разветвленной электрической цепи. При этом по оси ординат откладывают потенциалы точек, а по оси абсцисс – сопротивления резисторов в той последовательности, в которой они встречаются при обходе контура, начиная с произвольной точки, потенциал которой принимают за нуль и помещают в начало координат потенциальной диаграммы.

Каждой точке контура соответствует своя точка на потенциальной диаграмме. Точки на потенциальной диаграмме соединяются отрезками.

Рассмотрим последовательность построения потенциальной диаграммы, используя результаты расчета примера 1.3.

**Пример 1.11.** Построить потенциальную диаграмму для контура АFBСKДА (рисунок 1.37).

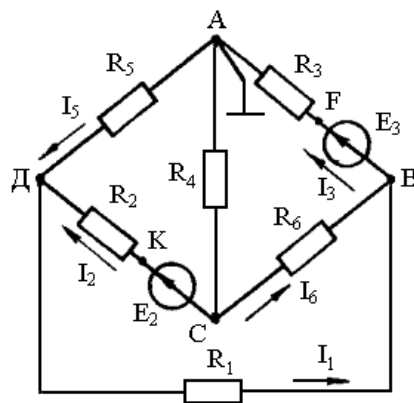


Рисунок 1.37 - Схема замещения электрической цепи

**Решение.** Обход контура начнем с точки А. При заземлении этой точки потенциал ее становится равным нулю.

Определяем потенциалы оставшихся точек контура (обход контура

производим по часовой стрелке), учитывая при этом, что ток во внешней цепи течет от точек высшего потенциала к точкам низшего потенциала, а во внутренней цепи (через источник э.д.с.) наоборот – от точек низшего потенциала к точкам высшего потенциала.

При переходе от точки  $A$  к точке  $F$  (рисунок 1.37) проходим через резистор  $R_3$ , падение напряжения на котором  $I_3R_3$ . Потенциал точки  $F$  выше потенциала точки  $A$  на эту величину, так как ток  $I_3$  течет от точки  $F$  к точке  $A$ , поэтому:

$$\varphi_F - \varphi_A = I_3R_3, \text{ откуда}$$

$$\varphi_F = \varphi_A + I_3R_3 = 0 + 0,56095 \cdot 20 = 11,219 \text{ В.}$$

Между точками  $F$  и  $B$  действует э.д.с.  $E_3$  напротив обхода контура, поэтому при переходе от точки  $F$  к точке  $B$  потенциал понижается на величину этой э.д.с.:

$$\varphi_B = \varphi_F - E_3 = 11,219 - 37,5 = -26,281 \text{ В.}$$

Потенциал точки  $C$  выше потенциала  $B$  на величину падения напряжения на резисторе  $R_6$ , так как ток направлен от точки  $C$  к точке  $B$ :

$$\varphi_C = \varphi_B + I_6R_6 = -26,281 + (-0,06726) \cdot 300 = -46,459 \text{ В.}$$

Потенциал точки  $K$  больше на величину э.д.с.  $E_2$ , так как она действует согласно с направлением обхода:

$$\varphi_K = \varphi_C + E_2 = -46,459 + 36,25 = -10,2089 \text{ В.}$$

Аналогично определяются потенциалы точек  $D$  и  $A$ :

$$\varphi_D = \varphi_K - I_2R_2 = -10,2089 - 0,53187 \cdot 12,5 = -16,857 \text{ В,}$$

$$\varphi_A = \varphi_D + I_5R_5 = -16,857 + 0,09634 \cdot 175 = 0,0021 \approx 0.$$

Таким образом, закончив обход, вернулись в исходную точку  $A$ , потенциал которой принят равным нулю.

При построении потенциальной диаграммы (рисунок 1.38) выбираем масштаб по оси сопротивлений  $m_R=50$  Ом/см, а масштаб по оси потенциалов принимаем  $m_\varphi=5$  В/см.

Практическая значимость потенциальной диаграммы заключается в том, что она позволяет графически определить напряжение между двумя любыми точками схемы. Это напряжение равно длине отрезка по вертикали между этими точками на потенциальной диаграмме, умноженному на масштаб по напряжению  $m_\varphi$ .

Допустим, если необходимо найти напряжение между точками  $A$  и  $C$  схемы (рисунок 1.37), то длина отрезка между этими точками на потенциальной диаграмме  $\ell_{AC}=9,3$  см (рисунок 1.38), а величина напряжения:

$$U_{AC} = \ell_{AC} \cdot m_\varphi = 9,3 \cdot 5 = 46,5 \text{ В.}$$



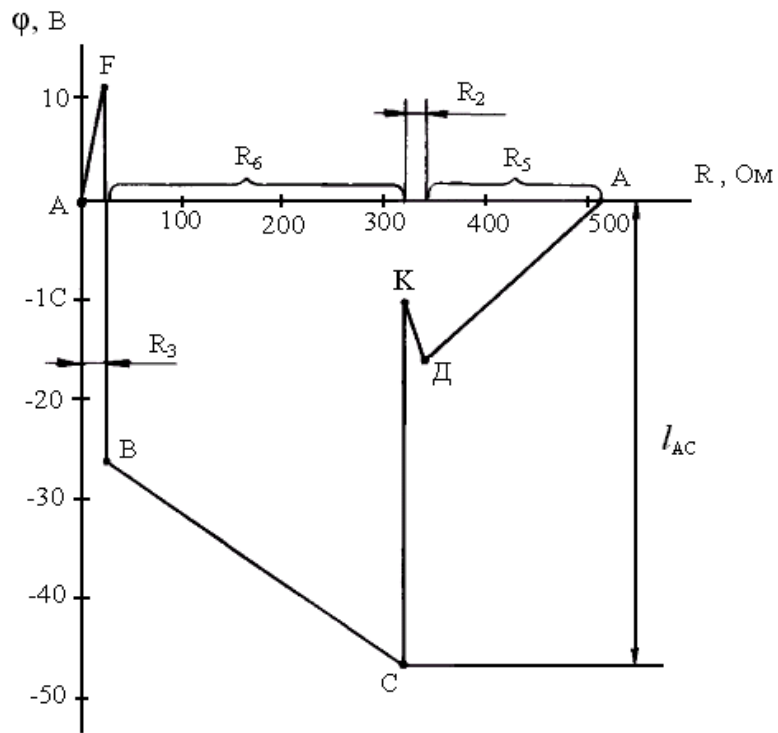


Рисунок 1.38 - Потенциальная диаграмма

Величину этого напряжения можно для проверки определить из второго закона Кирхгофа:

$$U_{AC} + I_6 R_6 + I_3 R_3 = E_3,$$

откуда

$$U_{AC} = E_3 - I_3 R_3 - I_6 R_6 = 37,5 - 0,56095 \cdot 20 - (-0,06726) \cdot 300 = 46,46 \text{ В}.$$

## 2. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

### 2.1. Основные определения

В технике большее применение нашел переменный ток. Это ток, изменяющийся во времени по величине и направлению. Чаще всего это периодический переменный ток, т.е. ток, удовлетворяющий условию:

$$i(t) = i(t+T) = \dots = i(t+kT),$$

где  $T$  – период переменного тока, наименьший промежуток времени, через который значение тока повторяется;  $k$  – любое целое число.

Величина  $f = \frac{1}{T}$ , обратная периоду, называется частотой переменного тока.

Единица измерения частоты – герц (Гц).  $f = 1$  Гц – частота такого тока, период которого равен одной секунде. Промышленный электрический ток имеет частоту 50 Гц.

В электротехнике используют понятие угловой частоты (единица угловой частоты – рад/с или  $\text{с}^{-1}$ ), которая определяется формулой:

$$\omega = 2\pi \cdot f. \quad (2.1)$$

При частоте  $f = 50$  Гц угловая частота  $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$ .

Промышленный переменный ток получают на электрических станциях в синхронных генераторах. Обычно это синусоидальный ток, т.е. ток, изменяющийся во времени по синусоидальному закону:

$$i = I_m \sin(\omega \cdot t + \alpha_i), \quad u = U_m \sin(\omega \cdot t + \alpha_u). \quad (2.2)$$

В выражениях (2.2)  $i$ ,  $u$  – мгновенные значения тока и напряжения – значения этих величин в любой момент времени (рисунок 2.1);

$U_m$ ,  $I_m$  – амплитуда напряжения, тока (максимальное значение синусоидальной электрической величины);

$\alpha$  – начальный угол (начальная фаза). Он определяет мгновенное значение синусоидальной электрической величины в момент времени  $t=0$ . Допустим, для тока из формулы (2.2) следует:

$$i = I_m \sin \alpha_i.$$

Аргумент синуса ( $\omega t + \alpha$ ) – фазовый угол, или фаза, которая характеризует состояние колебания (величину мгновенного значения) в определенный момент времени  $t$ .

Разность начальных углов называют углом сдвига фаз электрических величин. Угол сдвига фаз между током и напряжением (рисунок 2.1) принято обозначать в электротехнике буквой  $\varphi$ . Это разность начальных углов синусоид тока и напряжения.

Режим работы цепи переменного тока, в отличие от цепей постоянного тока, определяется не только резистивными элементами  $R$  (здесь называют

активным сопротивлением), но и индуктивными  $L$  и емкостными  $C$  элементами цепи.

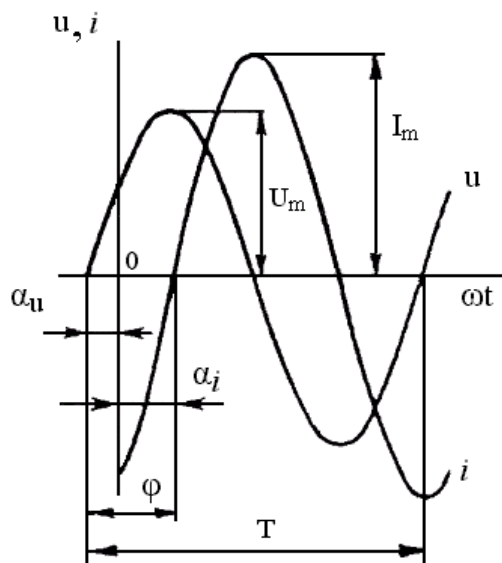


Рисунок 2.1 - Кривые мгновенных значений напряжения и тока

При расчете электрических цепей переменного тока по аналогии с цепями постоянного тока выбирают и проставляют стрелками на схемах замещения (рисунок 2.2) положительные направления электрических величин.

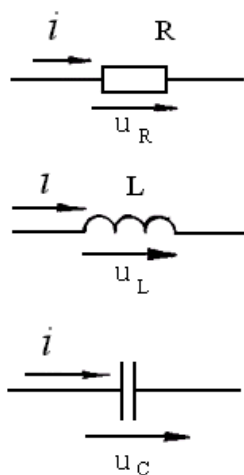


Рисунок 2.2 - Элементы цепи переменного тока

Мгновенное значение тока или напряжения при одном из двух возможных направлений принимается за положительное и указывается стрелкой на схеме.

## 2.2. Действующее значение синусоидального тока

Рассчитывать цепи переменного тока с использованием мгновенных значений крайне неудобно, поэтому периодически изменяющиеся во времени токи, э.д.с., напряжения и т.д. заменяют не зависящими от времени величинами, которые называют действующими значениями.

Действующее значение синусоидального тока является средне-квадратичным значением его за период и может быть определено по формуле:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (2.3)$$

Если в (2.3) подставить выражение для мгновенного значения тока  $i = I_m \sin(\omega \cdot t + \alpha)$ , то после несложных преобразований можно получить:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [I_m \sin(\omega \cdot t + \alpha)]^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m. \quad (2.4)$$

При этом действующее значение не зависит от начального угла  $\alpha$ .

Аналогично для действующих значений синусоидальных напряжения и э.д.с. можно записать:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot U_m, \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot E_m.$$

Обычно при рассмотрении явлений в цепях с переменными воздействиями под терминами «ток», «напряжение» понимают их действующие значения.

При измерениях в цепях переменного тока пользуются электроизмерительными приборами, большинство из которых отградуировано в действующих значениях измеряемых величин.

**Пример 2.1.** Определить действующее значение тока  $i = 141 \sin(\omega \cdot t + 30^\circ)$ .

**Решение.** В соответствии с выражением (2.4) будем иметь:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100 \text{ А.}$$

## 2.3. Изображение синусоидальных электрических величин с помощью векторов

При расчетах цепей переменного тока приходится производить сложение токов или напряжений, изменяющихся по синусоидальному закону. Аналитическое сложение даже двух таких величин – операция достаточно трудоемкая.

Если требуется сложить два тока  $i = i_1 + i_2$ , изменяющихся по закону синуса

$$\begin{aligned} i_1 &= I_{1m} \sin(\omega \cdot t + \alpha_1) \\ i_2 &= I_{2m} \sin(\omega \cdot t + \alpha_2), \end{aligned} \quad (2.5)$$

то амплитуда суммарной синусоиды определяется выражением

$$I_m = \sqrt{I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + 2I_{1m}I_{2m} \cos(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

а начальная фаза

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{I_{1m} \sin \alpha_1 + I_{2m} \sin \alpha_2}{I_{1m} \cos \alpha_1 + I_{2m} \cos \alpha_2}, \quad \text{т.е.}$$

$$i = I_m \sin(\omega \cdot t + \alpha).$$

Операция сложения значительно упрощается, если воспользоваться изображением синусоидальных функций электрических величин с помощью векторов.

Если в полярной системе координат поместить векторы (рисунок 2.3), длина которых в некотором масштабе равна амплитудам  $I_{1m}$  и  $I_{2m}$  складываемых токов  $i_1$  и  $i_2$  (2.5) и вращать эти векторы с постоянной угловой скоростью  $\omega$  против часовой стрелки, то проекции их на вертикальную ось изменяются по синусоидальному закону, т.е. равны мгновенным значениям слагаемых токов.

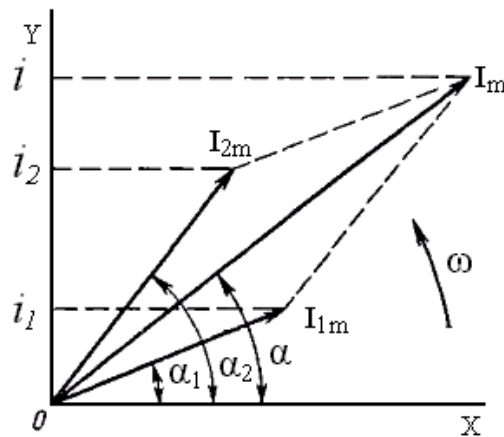


Рисунок 2.3 - Сложение векторов, изображающих синусоиды

Так как проекция суммы векторов на какую-либо ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось, то, сложив геометрически векторы  $\overline{I_{1m}}$  и  $\overline{I_{2m}}$ , получим вектор  $\overline{I_m}$ , изображающий амплитуду суммарного тока  $i$  и его начальный угол  $\alpha$ .

Таким образом, сложение двух или нескольких синусоидальных токов (напряжений, э.д.с. и т.п.) можно осуществлять путем геометрического сложения отображающих их векторов, т.е. с помощью так называемой векторной диаграммы.

При построении векторной диаграммы для удобства один из векторов откладывают по горизонтали или вертикали, так как при расчете важно знать взаимное расположение векторов, а не их положение относительно горизонтальной оси. Геометрическое сложение векторов производят по правилу параллелограмма (рисунок 2.4,а) или многоугольника (рисунок 2.4,б).

Обычно векторные диаграммы строят не для амплитудных, а для действующих значений электрических величин.

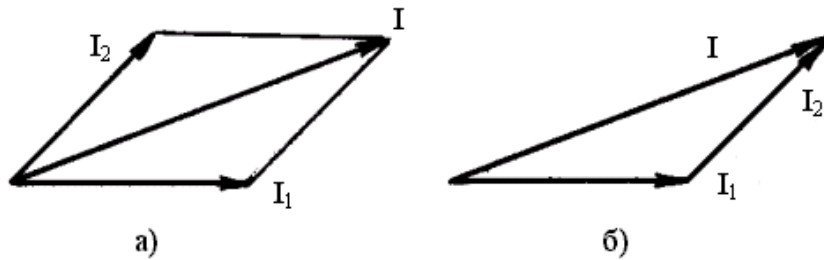


Рисунок 2.4 - Сложение векторов

## 2.4. Мощность переменного тока

Пусть к разветвленной электрической цепи приложено напряжение  $u = U_m \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ , а ток на входе ее  $i = I_m \sin \omega \cdot t$ .

Мгновенная мощность переменного тока в любой момент времени равна произведению мгновенных значений напряжения и тока на входе цепи:

$$p = ui = U_m \sin(\omega \cdot t + \varphi) \cdot I_m \sin \omega \cdot t = \sqrt{2}U \sin(\omega \cdot t + \varphi) \sqrt{2}I \sin \omega \cdot t = \\ = 2UI \sin(\omega \cdot t + \varphi) \sin \omega \cdot t.$$

Преобразовав произведения синусов и учитывая, что  $\cos - \varphi = \cos \varphi$ , получим:

$$p = UI [\cos(\omega \cdot t - \omega \cdot t - \varphi) - \cos(\omega \cdot t + \omega \cdot t + \varphi)] = \\ = UI [\cos - \varphi - \cos(2\omega \cdot t + \varphi)] = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega \cdot t + \varphi). \quad (2.6)$$

Из выражения (2.6) следует, что мгновенная мощность синусоидального тока - величина периодически изменяющаяся и состоит из двух слагаемых: неизменной во времени величины  $UI \cos \varphi$  и переменной величины  $UI \cos(2\omega \cdot t + \varphi)$ , изменяющейся с удвоенной частотой по сравнению с частотой приложенного напряжения.

Среднее значение мгновенной мощности, поглощаемой цепью за период, можно определить следующим образом:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega \cdot t + \varphi)] dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \cos \varphi dt = UI \cos \varphi, \quad (2.7)$$

так как среднее значение за период переменной слагающей  $UI \cos(2\omega \cdot t + \varphi)$ , как любой гармонической функции, равно нулю  $\left( \frac{1}{T} \int_0^T UI \cos(2\omega \cdot t + \varphi) dt = 0 \right)$ .

Среднюю мощность  $P = UI \cos \varphi$  принято называть активной мощностью. Она характеризует степень необратимого преобразования электрической энергии источника в другие виды энергии, например в тепловую (в резисторах), световую (в лампах накаливания), механическую (в электродвигателях).

Обычно когда говорят о мощности переменного тока, то имеют в виду активную мощность. Единица измерения активной мощности – ватт (Вт). Для измерения активной мощности пользуются электроизмерительным прибором ваттметром, показания которого пропорциональны напряжению, приложенному к его обмотке напряжения, току в его токовой обмотке и косинусу угла сдвига фаз между ними.

При расчетах цепей переменного тока вводят понятие реактивной мощности

$$Q = UI \sin \varphi, \quad (2.8)$$

единицу измерения которой называют вольт-ампером реактивным (вар).

При этом реактивную мощность индуктивного элемента считают положительной, а емкостного – отрицательной.

В цепях переменного тока используют понятие полной мощности

$$S = U \cdot I, \quad (2.9)$$

представляющей собой максимальную активную мощность, которая может быть получена от источника при заданных действующих значениях напряжения и тока, т.е. при  $\cos \varphi = 1$  в выражении (2.7). Полная мощность измеряется в вольт-амперах (ВА) и может быть измерена с помощью вольтметра и амперметра.

Отношение активной мощности к полной

$$\frac{P}{S} = \frac{UI \cos \varphi}{UI} = \cos \varphi \quad (2.10)$$

называют коэффициентом мощности, который характеризует степень использования источника электрической энергии (генератора).

Действительно, при неизменном напряжении источника питания и при одной и той же мощности  $P$ , передаваемой по линии электропередач к потребителю (нагрузке), ток в линии будет тем меньше, чем ближе будет коэффициент мощности к единице. При  $\cos \varphi < 1$  для передачи той же мощности потребуется больший ток, что вызывает дополнительные потери в линии (пропорционально квадрату тока) и обмотках генератора. При этом генератор оказывается недогруженным по мощности и перегруженным по току. Поэтому эффективное использование электрических генераторов и линий передач электрической энергии возможно только при высоком коэффициенте мощности потребителя. Отсюда и вытекает целесообразность осуществления мероприятий, направленных на повышение коэффициента мощности потребителя электрической энергии.

Здесь же можно заметить, что передавать электрическую энергию на большие расстояния выгоднее на повышенном напряжении, так как при той же передаваемой мощности по линии будет протекать значительно меньший ток.

Из формул (2.7), (2.8) и (2.9) для активной, реактивной и полной мощности следует, что

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad (2.11)$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}, \quad (2.12)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P}. \quad (2.13)$$

## 2.5. Синусоидальный ток в простейших цепях

Рассмотрим процессы, протекающие при синусоидальном воздействии, в резистивном, индуктивном и емкостном элементах в отдельности.

Здесь необходимо отметить то обстоятельство, что основные законы электротехники, закон Ома и законы Кирхгофа для цепей постоянного тока могут быть применены и для мгновенных значений переменных электрических величин на том основании, что для бесконечно малых промежутков времени мгновенное значение можно считать величиной постоянной. Поэтому для мгновенных значений в цепях синусоидального тока на основании формул (1.1), (1.3) и (1.4) можно записать законы Ома и Кирхгофа следующим образом:

$$i = \frac{u}{R}; \quad (2.14)$$

$$\sum_{\kappa=1}^n i_{\kappa} = 0; \quad (2.15)$$

$$\sum_{\kappa=1}^n u_{\kappa} = \sum_{\kappa=1}^n e_{\kappa}. \quad (2.16)$$

В дальнейшем будем называть уравнения (2.14), (2.15), (2.16) законами Ома и Кирхгофа, но следует иметь в виду, что это выражения, похожие на эти законы, т.е. аналоги законов Ома и Кирхгофа.

Аналогично определяется и мгновенная мощность:

$$p = u \cdot i. \quad (2.17)$$

**1. Синусоидальный ток в резистивном элементе.** Если к источнику синусоидального напряжения  $u = U_m \sin \omega \cdot t$  подключен резистивный элемент  $R$  (рисунок 2.5), то на основании (2.14) ток в этой цепи определится:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega \cdot t = I_m \sin \omega \cdot t,$$

где  $I_m = \frac{U_m}{R}$  - амплитуда тока.

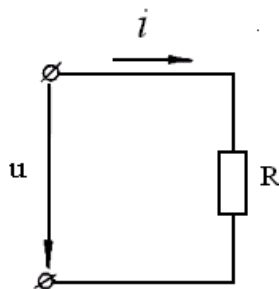


Рисунок 2.5 - Цепь с резистивным элементом

Таким образом, ток в резистивном элементе изменяется по синусоидальному закону и совпадает по фазе с приложенным напряжением,



так как синусоиды напряжения и тока одновременно проходят через нуль (рисунок 2.6,а) и одновременно достигают максимума.

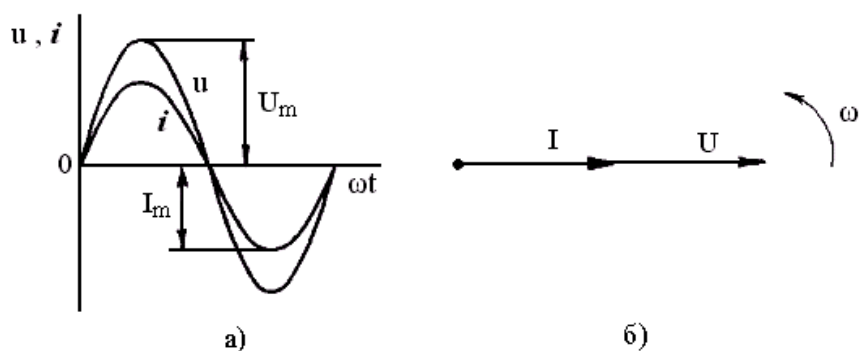


Рисунок 2.6 - Временная и векторная диаграммы в цепи с резистором

Если в выражении для амплитуды тока левую и правую часть поделить на  $\sqrt{2}$ , то получим аналог закона Ома для действующих значений:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (2.18)$$

*Действующее значение тока  $I$  в цепи с резистивным элементом равно действующему значению приложенного напряжения  $U$ , деленному на сопротивление резистора  $R$ .*

Мгновенная мощность в этой цепи согласно формуле (2.6), если в нее подставить  $\varphi=0$  (так как ток и напряжение совпадают по фазе), определится:

$$p = UI - UI \cos 2\omega \cdot t. \quad (2.19)$$

Мгновенная мощность представляет собой сумму двух слагающих: постоянной мощности  $U \cdot I$  и переменной -  $UI \cos 2\omega \cdot t$ , изменяющейся с удвоенной частотой по сравнению с частотой тока или приложенного напряжения. Построить график изменения мгновенной мощности можно следующим образом. Сначала откладывается постоянная величина и изображается косинусоида с амплитудой  $UI$  с учетом знака, а затем обе составляющие графически складываются (рисунок 2.7).

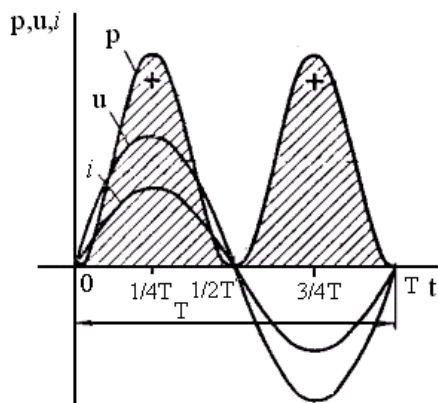


Рисунок 2.7 - Мгновенная мощность в цепи с резистором

Из графика следует, что мгновенная мощность в цепи с резистивным элементом все время положительна. Это означает непрерывное поступление энергии из источника в цепь, где она выделяется в резисторе в виде тепла. Обратного возврата энергии из цепи нет.

Средняя или активная мощность в цепи с резистивным элементом в соответствии с (2.7) определится:

$$P = UI \cos \varphi = UI \cos 0^\circ = UI = S. \quad (2.20)$$

Если в формулу (2.20) подставить выражение  $U = I \cdot R$  (2.18), то можно получить и другую формулу для активной мощности.

$$P = UI = I^2 \cdot R. \quad (2.21)$$

Как следует из формулы (2.21), вся активная мощность поглощается в резистивном элементе, т.е. электрическая энергия преобразуется в нем в тепло и исчезает из цепи. Поэтому, в отличие от цепей постоянного тока, резистивный элемент  $R$  (резистор) здесь называют активным сопротивлением.

Реактивная мощность в такой цепи:

$$Q = UI \sin \varphi = UI \sin 0^\circ = 0.$$

**2. Синусоидальный ток в индуктивном элементе.** Если в цепи (рисунок 2.8) протекает синусоидальный ток  $i = I_m \sin \omega \cdot t$ , то напряжение на индуктивном элементе можно определить по формуле:

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad (2.22)$$

т.е.:

$$\begin{aligned} u_L = u &= L \frac{di}{dt} = L \frac{d(I_m \sin \omega \cdot t)}{dt} = \omega \cdot LI_m \cos \omega \cdot t = \\ &= \omega \cdot LI_m \sin \left( \omega \cdot t + \frac{\pi}{2} \right) = U_{Lm} \sin \left( \omega \cdot t + \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

где амплитуда напряжения на индуктивном элементе

$$U_{Lm} = \omega \cdot LI_m. \quad (2.24)$$

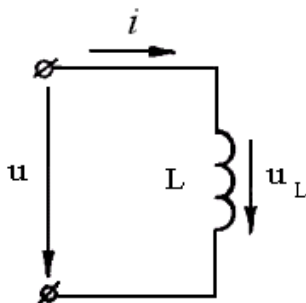


Рисунок 2.8 - Цепь с индуктивным элементом

Из формулы (2.23) следует, что напряжение на индуктивном элементе  $L$  опережает ток по фазе на угол  $\frac{\pi}{2}$ . Волновая и векторная диаграммы изображены на рисунке 2.9.

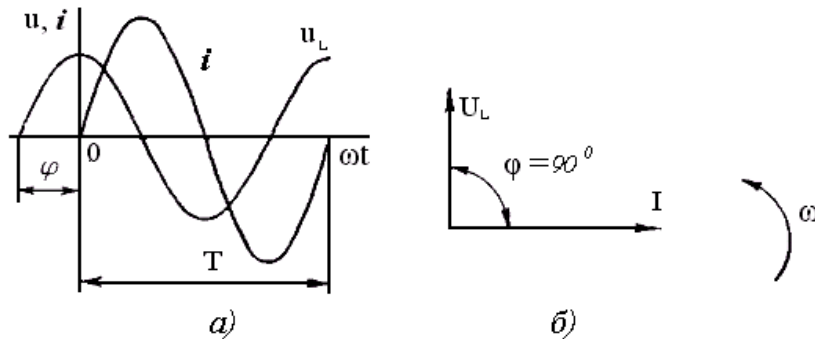


Рисунок 2.9 - Временная и векторная диаграммы в цепи с индуктивным элементом

Разделив правую и левую часть выражения (2.24) на  $\sqrt{2}$ , получим:

$$U_L = \omega \cdot LI, \text{ откуда}$$

$$I = \frac{U_L}{\omega \cdot L} = \frac{U_L}{X_L}. \quad (2.25)$$

Величина  $X_L = \omega \cdot L = 2\pi f \cdot L$  имеет размерность сопротивления, измеряется в омах и называется реактивным (индуктивным) сопротивлением.

Выражение (2.25) показывает, что действующее значение тока в цепи с индуктивным элементом равно действующему значению напряжения, деленному на сопротивление цепи, реактивное сопротивление  $X_L$ . Выражение (2.25) подобно закону Ома.

Мгновенная мощность в этой цепи

$$\begin{aligned} p &= u \cdot i = U_{Lm} \cos \omega \cdot t \cdot I_m \sin \omega \cdot t = \sqrt{2} U_L \cos \omega \cdot t \cdot \sqrt{2} I \sin \omega \cdot t = \\ &= 2 U_L I \cos \omega \cdot t \sin \omega \cdot t = U_L I \sin 2 \omega \cdot t \end{aligned}$$

изменяется по синусоидальному закону с удвоенной против тока частотой. График изменения мгновенной мощности во времени представлен на рисунке 2.10. Из графика следует, что в первую четверть периода мгновенная мощность положительна. Это означает поступление энергии из источника в цепь, где она запасается в магнитном поле индуктивного элемента. Во вторую четверть периода мгновенная мощность отрицательна, за это время энергия из магнитного поля цепи возвращается обратно в источник. Таким образом, наблюдается непрерывное переливание энергии из источника электрической энергии (генератор) в цепь (нагрузка) и обратно. Активная мощность цепью не потребляется, так как  $P = UI \cos \varphi = UI \cos 90^\circ = 0$ , а реактивная мощность в этом случае максимальна:

$$Q = UI \sin \varphi = UI \sin 90^\circ = UI = S.$$

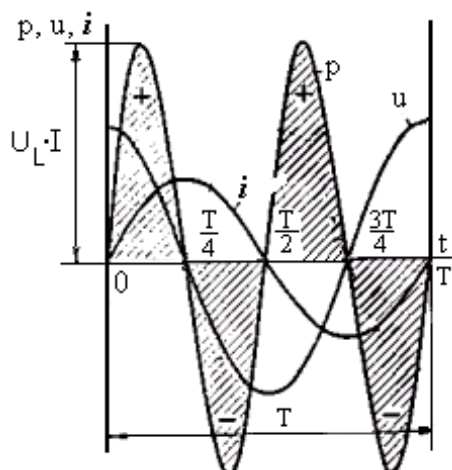


Рисунок 2.10 - Мгновенная мощность в цепи с индуктивным элементом

**3. Синусоидальный ток в емкостном элементе.** Пусть к цепи (рисунок 2.11) с емкостным элементом приложено напряжение  $u = U_m \sin \omega \cdot t$ . Мгновенное значение тока в такой цепи определяется выражением

$$i = C \frac{du_c}{dt}. \quad (2.26)$$

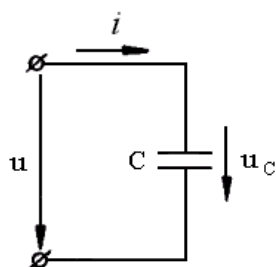


Рисунок 2.11 - Цепь с емкостным элементом

Учтя то обстоятельство, что по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений (2.16) в этой цепи можно записать:

$$\begin{aligned} u_c - u &= 0, \quad \text{т.е.} \quad u_c = u, \quad \text{получим:} \\ i &= C \frac{du_c}{dt} = C \frac{du}{dt} = C \frac{d(U_m \sin \omega \cdot t)}{dt} = U_m \cdot \omega \cdot C \cdot \cos \omega \cdot t = \\ &= U_m \cdot \omega \cdot C \cdot \sin \left( \omega \cdot t + \frac{\pi}{2} \right) = I_m \sin \left( \omega \cdot t + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Амплитуда тока в емкостном элементе будет:

$$I_m = U_m \cdot \omega \cdot C. \quad (2.28)$$

Разделив левую и правую части выражения (2.28) на  $\sqrt{2}$ , можно записать

$$U = \frac{1}{\omega \cdot C} I = X_c I, \quad (2.29)$$

где величина  $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2\pi \cdot fC}$  имеет размерность сопротивления и называется реактивным (емкостным) сопротивлением емкостного элемента.

Из формулы (2.29) можно выразить:

$$I = \frac{U}{X_C}, \quad (2.30)$$

т.е. действующее значение тока в емкостном элементе равно действующему значению напряжения, деленному на сопротивление, реактивное сопротивление его. Выражение (2.30) аналогично по форме закону Ома.

Из выражения (2.27) следует, что ток в емкостном элементе опережает по фазе приложенное напряжение на угол  $\pi/2$ . Временная и векторная диаграммы такой цепи изображены на рисунке 2.12.

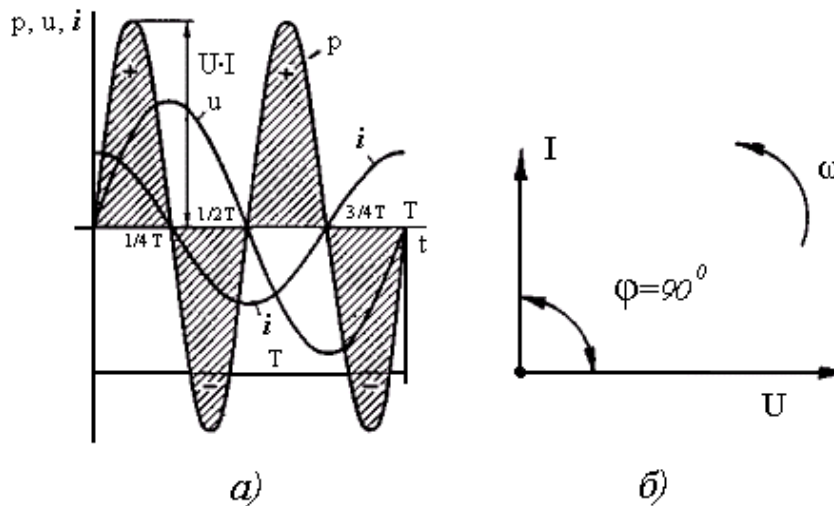


Рисунок 2.12 - Синусоидальный ток в емкостном элементе

Мгновенная мощность определяется, как и в предыдущем случае  $p = ui = U_m \sin \omega \cdot t \cdot I_m \cos \omega \cdot t = UI \sin 2\omega \cdot t$ , а график изменения ее представлен на рисунке 2.12,а. По кривой мгновенной мощности можно повторить то, что уже говорилось о мгновенной мощности в цепи с индуктивным элементом. Т.е. когда мгновенная мощность в цепи положительна, энергия из источника (генератор) поступает в цепь и запасается в электрическом поле конденсатора С. В промежутки времени, когда мгновенная мощность отрицательна, энергия из цепи возвращается в генератор, т.е. также наблюдается периодический обмен энергии между генератором и цепью. При этом мощность цепью не потребляется, т.к.  $P = UI \cos \varphi = UI \cos(-90^\circ) = 0$ , а реактивная мощность максимальна, т.е.  $Q = UI \sin \varphi = UI \sin(-90^\circ) = -UI$ .

## 2.6. Синусоидальный ток в последовательной цепи $R, L$ и $C$

Пусть в цепи с последовательным соединением  $R, L$  и  $C$ , (рисунок 2.13), значения которых известны, протекает синусоидальный ток  $i = I_m \sin \omega \cdot t$  и необходимо найти действующее значение приложенного напряжения  $U$ .

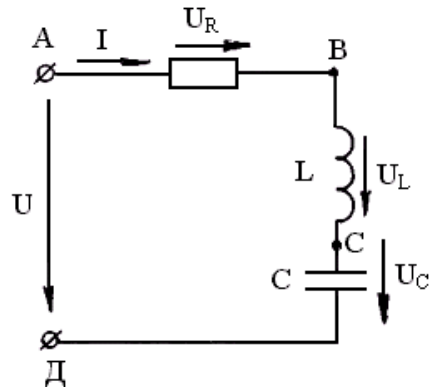


Рисунок 2.13 - Последовательное соединение  $R, L, C$  элементов

Протекающий в цепи ток  $I$  вызывает падения напряжений на этих элементах, значения которых в соответствии с формулами (2.18), (2.25) и (2.29) определяются:

$$U_R = I \cdot R, \quad U_L = I \cdot X_L = I \omega \cdot L, \quad U_C = I \cdot X_C = I \frac{1}{\omega \cdot C}.$$

Решение поставленной задачи удобнее провести с помощью векторной диаграммы. Чаще строят топографические векторные диаграммы напряжений, отличающиеся тем, что расположение векторов напряжений на ней строго соответствует расположению элементов на схеме. При этом каждая точка диаграммы отображает определенную точку схемы. Для последовательного соединения начинают построение диаграммы с вектора тока, так как он является общим для всех элементов цепи, располагая его для удобства горизонтально или вертикально.

Построим топографическую векторную диаграмму для схемы рисунка 2.13 (рисунок 2.14). Из точки  $A$  откладываем вектор тока, равный в масштабе тока действующему значению его. Вектор падения напряжения на

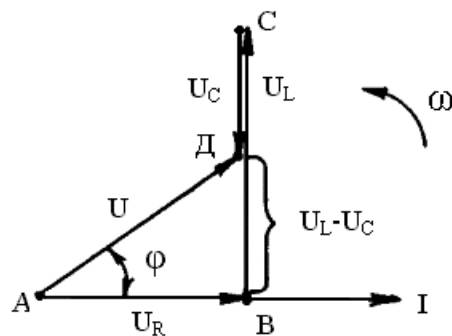


Рисунок 2.14 - Топографическая векторная диаграмма последовательной цепи  $R, L, C$

активном сопротивлении  $U_R$  откладываем из точки  $A$ , совпадающий по фазе с током. Вектор  $U_L$ , изображающий напряжение на индуктивном элементе, откладываем из конца вектора  $U_R$  (точка  $B$ ) вверх, так как напряжение на индуктивном элементе опережает ток на угол  $\pi/2$ . Из точки  $C$  откладывается вниз вектор  $U_C$ , изображающий напряжение на емкостном элементе, так как напряжение на нем отстает от тока на угол  $\pi/2$ . Между точками  $A$  и  $D$  располагается вектор приложенного напряжения  $U$ .

Рассматривая так называемый треугольник напряжений  $ABD$ , можно записать

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2, \quad \text{или}$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} \quad (2.31)$$

Если в выражение (2.31) подставить напряжения, полученные по формулам (2.18), (2.25) и (2.29), то получим:

$$U = \sqrt{(I \cdot R)^2 + (I \cdot X_L - I \cdot X_C)^2} = I \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I \sqrt{R^2 + X^2} = I \cdot Z, \quad (2.32)$$

где  $X = X_L - X_C$  – реактивное сопротивление цепи, а

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} \quad (2.33)$$

называют полным сопротивлением цепи.

Выражение (2.32) по форме похоже на закон Ома, т.е. действующее значение тока в цепи (рисунок 2.13) равно действующему значению приложенного напряжения, деленному на полное сопротивление цепи.

Угол сдвига фаз между током в цепи и приложенным напряжением из векторной диаграммы (рисунок 2.14) определится:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{U_L - U_C}{U_R}, \quad \text{или} \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{U_L - U_C}{U_R} = \operatorname{arctg} \frac{I \cdot X_L - I \cdot X_C}{I \cdot R} = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R} = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R} = \operatorname{arctg} \frac{X}{R}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Очевидно, что угол  $\varphi$  не зависит от приложенного напряжения, а зависит от соотношения сопротивлений отдельных элементов цепи.

Из формулы (2.34) следует, что при  $X_L > X_C$  в цепи преобладает индуктивное сопротивление, а угол сдвига фаз  $\varphi > 0$ , т.е. положителен, так как  $U_L > U_C$  и приложенное напряжение опережает ток (рисунок 2.14) по фазе. Если в цепи преобладает емкостное сопротивление ( $X_L < X_C$ ), то цепь имеет емкостный характер и угол сдвига фаз  $\varphi < 0$ , а ток в цепи опережает приложенное напряжение, так как  $U_C > U_L$  (рисунок 2.14). При  $X_L = X_C$  цепь носит чисто активный характер ( $Z = R$ ) и в ней наблюдается режим резонанса, о котором будет сказано ниже. Величину

$$U_R = I \cdot R = U \cdot \cos \varphi = U_a \quad (2.35)$$

называют активной составляющей напряжения, совпадающей по фазе с током, а величину

$$U_L - U_C = I(X_L - X_C) = I \cdot X = U \cdot \sin \varphi = U_p \quad (2.36)$$

называют реактивной составляющей напряжения, сдвинутой по фазе относительно тока на угол  $\pi/2$ .

Из треугольника напряжений следует, что приложенное к цепи напряжение определяется:

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}, \quad (2.37)$$

а также необходимо отметить, что второй закон Кирхгофа выполняется для действующих значений напряжений, но только при геометрическом сложении их изображающих векторов, т.е.:

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C. \quad (2.38)$$

Если поделить все стороны треугольника напряжений АД (рисунок 2.14) на ток, то получим треугольник сопротивлений (рисунок 2.15), из которого можно получить следующие соотношения:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}, \quad \sin \varphi = \frac{X}{Z}, \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}, \quad (2.39)$$

которыми пользуются при практических расчетах.

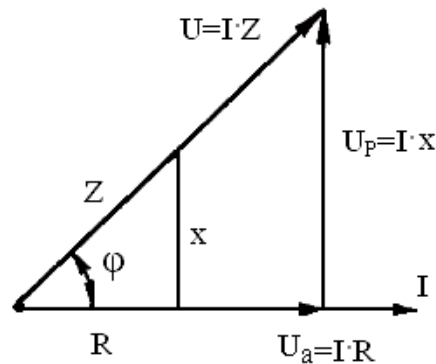


Рисунок 2.15 - Треугольник сопротивлений

Постоянный ток можно считать частным случаем переменного, когда период  $T = \infty$ , а частота равна нулю  $\left(f = \frac{1}{T} = 0\right)$ . Сопротивление индуктивного элемента на постоянном токе  $X_L = \omega \cdot L = 2\pi f L = 0$ , а емкостного  $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2\pi f C} = \infty$ . Таким образом, индуктивный элемент не оказывает сопротивления постоянному току, а емкостный элемент ведет себя как разрыв, т.е. постоянный ток не течет через него. По этой причине в схемах замещения на постоянном токе нет смысла учитывать эти элементы.

**Пример 2.2.** Для цепи (рисунок 2.16) определить действующее и мгновенные значения приложенного напряжения и потребляемую цепью



мощность, если  $R=32$  Ом,  $L=76,43$  мГн,  $f=50$  Гц, а мгновенное значение тока в цепи  $i = 4 \sin \omega t$ .

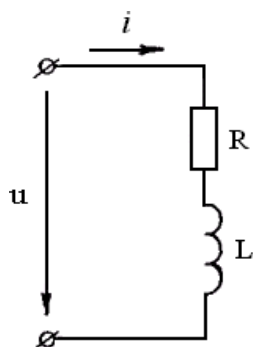


Рисунок 2.16 - Синусоидальный ток в цепи R, L

**Решение.** Определяем реактивное сопротивление индуктивного элемента:

$$X_L = \omega L = 2\pi f \cdot L = 2\pi \cdot 50 \cdot 76,43 \cdot 10^{-3} = 24 \text{ Ом.}$$

Амплитуда приложенного к цепи напряжения:

$$U_m = I_m \cdot Z = I_m \sqrt{R^2 + X_L^2} = 4\sqrt{32^2 + 24^2} = 160 \text{ В.}$$

Угол сдвига фаз между током и приложенным напряжением:

$$\varphi = \arctg \frac{X_L}{R} = \arctg \frac{24}{32} = \arctg 0,75 = 36,87^\circ .$$

Мгновенное значение приложенного напряжения:

$$u = U_m \sin(\omega \cdot t + \varphi) = 160 \sin(\omega \cdot t + 36,87^\circ) .$$

Знак перед начальной фазой мгновенного напряжения определяется характером цепи. В данном случае необходимо фазу брать со знаком плюс, так как цепь имеет индуктивный характер, т.е. напряжение опережает ток, а синусоида тока по условию задачи проходит через нуль.

Действующее значение приложенного напряжения

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{160}{\sqrt{2}} = 113,15 \text{ В.}$$

Активная и реактивная мощности цепи:

$$P = UI \cos \varphi = 113,15 \cdot 2,83 \cdot \cos 36,87^\circ = 256,17 \text{ Вт.}$$

$$Q = UI \sin \varphi = 113,15 \cdot 2,83 \cdot \sin 36,87^\circ = 192,13 \text{ вар.}$$

В этих формулах действующее значение тока

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2,83 \text{ А.}$$

Схема (рисунок 2.16) может служить схемой замещения реальной индуктивной катушки, обладающей активным сопротивлением  $R$  и индуктивным сопротивлением  $X_L$ .

**Пример 2.3.** Пусть в цепи (рисунок 2.17,а) необходимо определить мгновенные значения тока  $i$  и напряжения на емкостном элементе  $u_C$ .

если  $R = 16 \text{ Ом}$ ,  $C = 265 \text{ мкФ}$ ,  $f = 50 \text{ Гц}$ , а мгновенное значение приложенного напряжения  $u = 240 \sin \omega t$ .

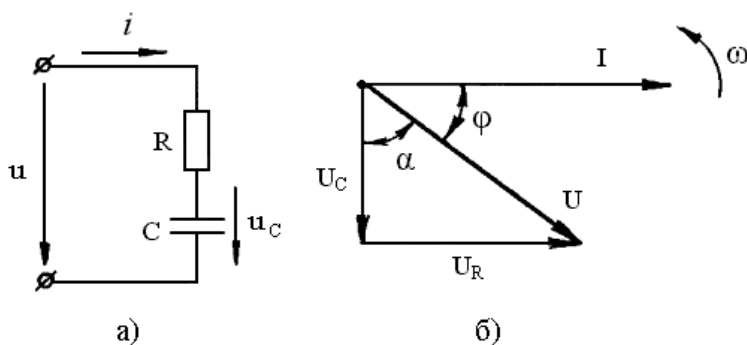


Рисунок 2.17 - Цепь  $R, C$  и ее векторная диаграмма

**Решение.** Определяем реактивное сопротивление емкостного элемента:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{314 \cdot 265 \cdot 10^{-6}} = 12 \text{ Ом.}$$

Амплитуда тока в цепи:

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{240}{\sqrt{16^2 + 12^2}} = 12 \text{ А.}$$

Угол сдвига фаз между током в цепи и приложенным напряжением:

$$\varphi = \arctg \frac{X_C}{R} = \arctg \frac{12}{16} = \arctg 0,75 = 36,87^\circ,$$

а мгновенное значение тока в цепи запишется:  $i = 12 \sin(\omega \cdot t + 36,87^\circ)$ . При этом начальную фазу необходимо записать с положительным знаком, так как цепь имеет емкостный характер и ток в цепи опережает напряжение (рисунок 2.17,б), а начальная фаза приложенного напряжения равна нулю.

Амплитуда напряжения на емкостном элементе:

$$U_{mC} = I_m \cdot X_C = 12 \cdot 12 = 144 \text{ В,}$$

и мгновенное значение напряжения на нем:

$$u_C = U_{mC} \sin(\omega \cdot t + \alpha) = 144 \sin(\omega \cdot t - 53,13^\circ).$$

Начальная фаза этого напряжения, как следует из векторной диаграммы (рисунок 2.17,б), может быть определена из выражения:

$\alpha = 90^\circ - \varphi = 90^\circ - 36,87^\circ = 53,13^\circ$  и взята со знаком «минус», так как напряжение на емкостном элементе отстает от приложенного напряжения (рисунок 2.17,б) на угол  $\alpha$ .

**Пример 2.4.** Катушка индуктивности с параметрами  $R$  и  $L$  (рисунок 2.18) подключена к источнику синусоидального напряжения  $u = 141 \sin \omega \cdot t$ , в цепи которого протекает ток  $I = 10 \text{ А}$ .

Определить параметры индуктивной катушки  $R$  и  $L$ , если показания ваттметра  $P = 500 \text{ Вт}$ , а частота питающего напряжения  $f = 50 \text{ Гц}$ .

**Решение.** Ваттметр показывает мощность, которая выделяется в активном сопротивлении  $R$  индуктивной катушки, значение которого можно определить по формуле (2.21):

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{500}{10^2} = 5 \text{ Ом.}$$

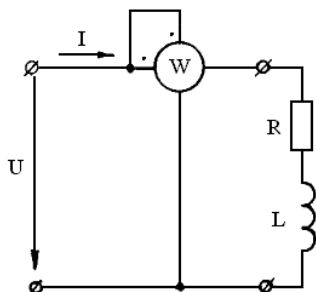


Рисунок 2.18 - К определению параметров индуктивной катушки

Полное сопротивление цепи:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{100}{10} = 10 \text{ Ом, где действующее значение напряжения}$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100 \text{ В.}$$

Реактивное сопротивление катушки определится из соотношения:

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8,66 \text{ Ом, а индуктивность ее:}$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{8,66}{314} = 27,6 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Таким образом, если необходимо практически определить параметры индуктивной катушки, то это можно сделать с помощью электроизмерительных приборов вольтметра, амперметра и ваттметра при подключении катушки к источнику синусоидального напряжения.

## 2.7. Расчет цепей синусоидального тока при последовательном соединении элементов

Допустим, в цепи с известными параметрами  $R_1, L_1, R_2, C, R_3, L_2$  (рисунок 2.19,а) необходимо по заданному действующему значению тока  $I$

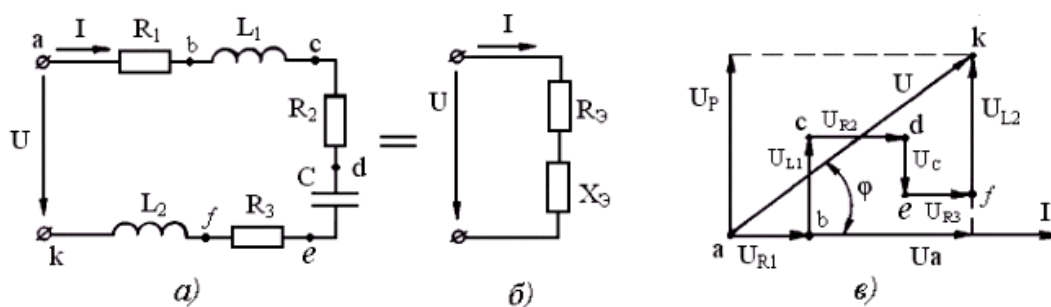


Рисунок 2.19 - Последовательное соединение элементов цепи и ее векторная диаграмма

найти приложенное напряжение  $U$ .

Поставленную задачу можно решить путем построения топографической векторной диаграммы напряжений (рисунок 2.19,в), предварительно определив напряжения на всех элементах цепи:

$$\begin{aligned} U_{R1} &= I \cdot R_1, & U_{R2} &= I \cdot R_2, & U_{R3} &= I \cdot R_3, \\ U_{L1} &= I \cdot X_{L1}, & U_{L2} &= I \cdot X_{L2}, & U_C &= I \cdot X_C. \end{aligned}$$

Если полученное в результате геометрического сложения векторов напряжений приложенное напряжение  $U$  (рисунок 2.19,в) разложить на активную  $U_a$  и реактивную  $U_p$  составляющие, то для них можно записать:

$$\begin{aligned} U_a &= U \cdot \cos \varphi = U_{R1} + U_{R2} + U_{R3} = I(R_1 + R_2 + R_3), \\ U_p &= U \cdot \sin \varphi = U_{L1} - U_C + U_{L2} = I(X_{L1} - X_C + X_{L2}). \end{aligned}$$

Тогда приложенное к цепи напряжение определится:

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = I \sqrt{(R_1 + R_2 + R_3)^2 + (X_{L1} - X_C + X_{L2})^2}. \quad (2.40)$$

Как и в цепях постоянного тока, при расчете цепей переменного тока используют замену нескольких последовательно соединенных элементов одним эквивалентным (рисунок 2.19,б), имеющим активную составляющую сопротивления  $R_3$  и реактивную составляющую  $X_3$ .

Для эквивалентной схемы замещения (рисунок 2.19,б) на основании аналога закона Ома можно записать:

$$U = I \cdot Z_3 = I \sqrt{R_3^2 + X_3^2}. \quad (2.41)$$

Из сравнения выражений (2.40) и (2.41) следует, что *активное сопротивление  $R_3$  равно арифметической сумме активных сопротивлений заменяемой последовательной цепи, т.е.:*

$$R_3 = R_1 + R_2 + R_3.$$

Эквивалентное реактивное сопротивление  $X_3$  равно *алгебраической сумме реактивных сопротивлений*, в которой емкостные сопротивления входят со знаком «минус»:

$$X_3 = X_{L1} - X_C + X_{L2}.$$

В случае замены « $n$ » последовательно соединенных элементов эквивалентным полное сопротивление запишется:

$$Z = \sqrt{\left( \sum_{\kappa=1}^n R_{\kappa} \right)^2 + \left( \sum_{\kappa=1}^n X_{\kappa} \right)^2}. \quad (2.42)$$

Активная и реактивная составляющие напряжения определяются формулами:

$$U_a = \sum_{\kappa=1}^n U_{R\kappa}, \quad U_p = \sum_{\kappa=1}^n U_{X\kappa}.$$

При этом напряжения на емкостных элементах входят с отрицательным знаком.

**Пример 2.5.** Для цепи (рисунок 2.20) определить ток в цепи, угол сдвига фаз между током и напряжением, активную, реактивную и полную мощности цепи, если  $U = 220$  В,  $R_1 = 3$  Ом,  $X_{L1} = 11$  Ом,  $R_2 = 4$  Ом,  $X_C = 3$  Ом,  $X_{L2} = 7$  Ом,  $R_3 = 5$  Ом.

**Решение.** По формуле (2.42) определяется полное сопротивление цепи:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{(R_1 + R_2 + R_3)^2 + (X_{L1} + X_{L2} - X_C)^2} = \\ = \sqrt{12^2 + 14^2} = 18,44 \text{ Ом.}$$

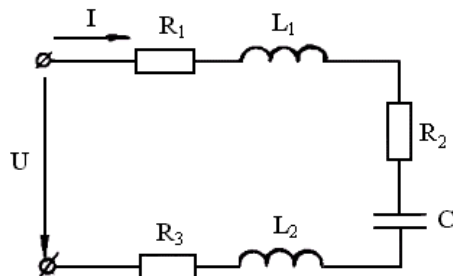


Рисунок 2.20 - К расчету последовательной цепи

Действующее значение тока в цепи:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{18,44} = 11,93 \text{ А,}$$

а угол сдвига фаз его относительно напряжения определится:

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{14}{12} = \arctg 1,167 = 49,4^\circ.$$

Мощности в цепи:

$$P = UI \cos \varphi = 220 \cdot 11,93 \cdot \cos 49,4^\circ = 1708 \text{ Вт,} \\ Q = UI \sin \varphi = 220 \cdot 11,93 \cdot \sin 49,4^\circ = 1992,8 \text{ вар,} \\ S = UI = 220 \cdot 11,93 = 2624,6 \text{ ВА.}$$

## 2.8. Расчет цепи синусоидального тока при параллельном соединении элементов

Расчет цепей переменного тока с параллельным соединением элементов часто проводят через проводимости.

**1. Понятие проводимости.** В цепях переменного тока вводят понятие активной, реактивной и полной проводимостей. На рисунке 2.21 изображена цепь  $R, L$  и ее векторная диаграмма.

Действующее значение тока в такой цепи определяется выражением

$$I = \frac{U}{Z} = yU. \quad (2.43)$$

Величину, обратную полному сопротивлению цепи, называют полной проводимостью, т.е.

$$y = \frac{1}{Z}. \quad (2.44)$$

Ток в любой ветви можно рассматривать состоящим из двух составляющих: активной  $I_a$  (рисунок 2.20,б), совпадающей по фазе с напряжением, и реактивной  $I_p$ , сдвинутой по отношению к напряжению на угол  $\pi/2$ .

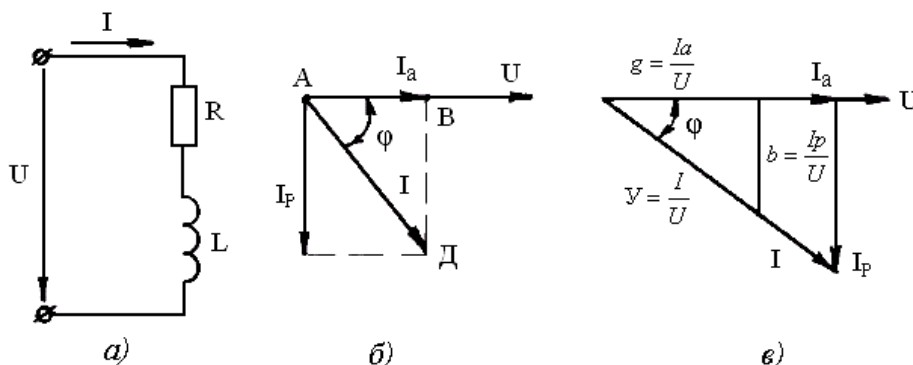


Рисунок 2.21 - Цепь  $R, L$  и ее векторная диаграмма

Активная составляющая тока из векторной диаграммы (рисунок 2.21,б) определится:

$$I_a = I \cdot \cos \varphi = \frac{U}{Z} \cos \varphi.$$

Если в это выражение подставить на основании (2.39)  $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$ , то получим:

$$I_a = \frac{U}{Z} \cdot \frac{R}{Z} = U \frac{R}{Z^2} = U \cdot g, \quad (2.45)$$

где величина

$$g = \frac{R}{Z^2} \quad (2.46)$$

называется активной проводимостью ветви (цепи).

Аналогично можно записать выражения для реактивной составляющей тока:

$$I_p = I \cdot \sin \varphi = \frac{U}{Z} \sin \varphi = \frac{U}{Z} \frac{X}{Z} = U \frac{X}{Z^2} = U \cdot b. \quad (2.47)$$

В этом выражении величину

$$b = \frac{X}{Z^2} \quad (2.48)$$

называют реактивной проводимостью ветви (цепи).

Если все стороны треугольника токов АВД (рисунок 2.21,б) поделить на напряжение  $U$ , то, согласно формулам (2.43), (2.45) и (2.47), получится треугольник проводимостей с катетами  $b$  и  $g$  и гипотенузой  $y$  (рисунок 2.21,в). Из этого треугольника следуют соотношения:

$$g = y \cos \varphi, \quad b = y \sin \varphi, \quad y = \sqrt{g^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{b}{g}. \quad (2.49)$$

Если ветвь содержит  $R$  и  $C$ , то соотношения (2.43) - (2.49) будут справедливы и для этой цепи, только треугольник проводимостей окажется

перевернутым, так как в ней ток  $I$  будет опережать приложенное напряжение  $U$  на угол  $\varphi$ .

**2. Параллельное соединение элементов.** Пусть в цепи (рисунок 2.22,а) по известным действующему значению приложенного напряжения  $U$  и параметрам цепи  $R_1, R_2, L, C$  необходимо определить токи.

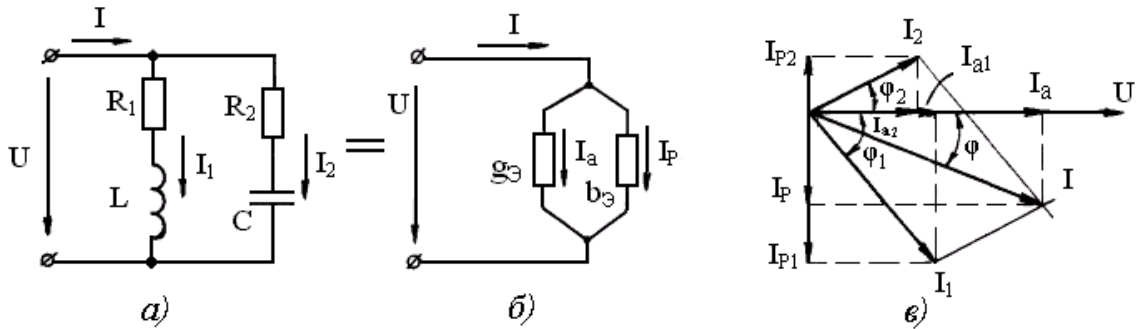


Рисунок 2.22 - Параллельное соединение элементов и его векторная диаграмма

Построим векторную диаграмму. При параллельном соединении построение диаграммы удобнее начинать с вектора приложенного напряжения, отложив его, допустим, горизонтально (рисунок 2.22,в).

Затем откладываются векторы токов параллельных ветвей, значения которых можно определить из соотношений:

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + (\omega \cdot L)^2}}, \quad I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}},$$

так как эти ветви находятся под одним напряжением, а углы сдвига фаз их относительно напряжения будут:

$$\varphi_1 = \arctg \frac{\omega L}{R_1}, \quad \varphi_2 = \arctg \frac{1}{\omega \cdot C \cdot R_2}.$$

Ток  $I$  в неразветвленной части цепи определится как геометрическая сумма токов параллельных ветвей.

Если разложить полученные токи на активную и реактивную составляющие (рисунок 2.22,в), то можно записать:

$$I_a = I \cos \varphi = I_{a1} + I_{a2} = g_1 U + g_2 U = (g_1 + g_2) U, \\ I_p = I \sin \varphi = I_{p1} - I_{p2} = b_1 U - b_2 U = (b_1 - b_2) U. \quad (2.50)$$

Очевидно, что и параллельно соединенные ветви можно заменить одной эквивалентной с параметрами  $g_3$  и  $b_3$  (рисунок 2.22,б), для которой можно записать:

$$I_a = g_3 U, \quad I_p = b_3 U.$$

Из сравнения этих формул с (2.50) следует, что при замене параллельных ветвей эквивалентной, ее активная проводимость *равна арифметической сумме*

активных проводимостей параллельных ветвей, а реактивная – алгебраической сумме реактивных проводимостей ветвей, емкостные проводимости входят с отрицательным знаком, т.е.:

$$\begin{aligned} g_3 &= g_1 + g_2, \\ b_3 &= b_1 - b_2. \end{aligned} \quad (2.51)$$

В случае «n» параллельных ветвей полная проводимость цепи и угол сдвига фаз между током на входе цепи и приложенным напряжением запишутся:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\left(\sum_{\kappa=1}^n g_{\kappa}\right)^2 + \left(\sum_{\kappa=1}^n b_{\kappa}\right)^2}, \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{\sum_{\kappa=1}^n b_{\kappa}}{\sum_{\kappa=1}^n g_{\kappa}}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

**3. Смешанное соединение элементов.** Если в схеме (рисунок 2.23,а) необходимо найти токи в ветвях и напряжение  $U_{AB}$  по известным параметрам цепи  $R_1, R_2, R_3, R_4, L_1, L_2, C$  и приложенному напряжению, то эта задача решается следующим образом.

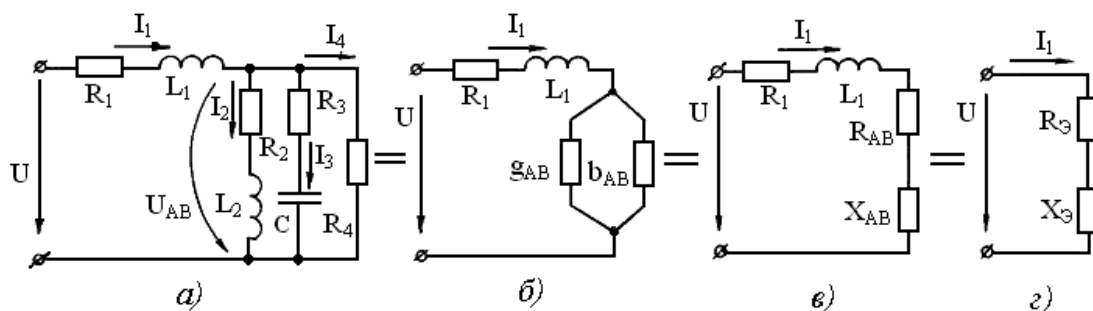


Рисунок 2.23 - Эквивалентная замена смешанного соединения элементов

Сначала параллельные ветви заменяются одной эквивалентной (рисунок 2.23,б) и определяются активная и реактивная проводимости отдельных ветвей и эквивалентной по формулам (2.46) и (2.48), т.е.:

$$g_2 = \frac{R_2}{Z_2^2} = \frac{R_2}{R_2^2 + (\omega \cdot L_2)^2}, \quad g_3 = \frac{R_3}{Z_3^2} = \frac{R_3}{R_3^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}, \quad g_4 = \frac{1}{R_4}, \quad g_{AB} = g_2 + g_3 + g_4,$$

$$b_2 = \frac{X_2}{Z_2^2} = \frac{\omega \cdot L}{R_2^2 + (\omega \cdot L_2)^2}, \quad b_3 = \frac{X_3}{Z_3^2} = \frac{\frac{1}{\omega \cdot C}}{R_3^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}, \quad b_4 = 0, \quad b_{AB} = b_2 - b_3,$$

а затем полная проводимость эквивалентной ветви:

$$y_{AB} = \sqrt{g_{AB}^2 + b_{AB}^2}.$$



Теперь необходимо перейти от проводимостей эквивалентной ветви к сопротивлениям (рисунок 2.23,в)  $R_{AB}$  и  $X_{AB}$  по так называемым переходным формулам, которые могут быть получены на основании выражений (2.46) и (2.48) с учетом (2.44), т.е.  $R = g \cdot Z^2$ , или  $R = \frac{g}{y^2}$ , а  $X = b \cdot Z^2$ , или  $X = \frac{b}{y^2}$ .

Для нашего случая будем иметь:

$$R_{AB} = g_{AB} / y_{AB}^2, \quad X_{AB} = b_{AB} / y_{AB}^2.$$

Далее определяется ток  $I_1$  и напряжение  $U_{AB}$ , а также токи в параллельных ветвях:

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + X_1^2}} = \frac{U}{\sqrt{(R_1 + R_{AB})^2 + (\omega \cdot L_1 + X_{AB})^2}},$$

$$U_{AB} = I_1 / y_{AB}, \quad I_2 = \frac{U_{AB}}{Z_2} = \frac{U_{AB}}{\sqrt{R_2^2 + (\omega \cdot L_2)^2}},$$

$$I_3 = \frac{U_{AB}}{Z_3} = \frac{U_{AB}}{\sqrt{R_3^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}}, \quad I_4 = \frac{U_{AB}}{R_4}.$$

Рассмотренный способ расчета разветвленной цепи называют иногда в литературе методом проводимостей.

**Пример 2.6.** Для цепи (рисунок 2.23) найти ток  $I_1$ , если  $R_1=2$  Ом,  $X_{L1}=4$  Ом,  $R_2=5$  Ом,  $X_{L2}=6$  Ом,  $R_3=3$  Ом,  $X_C=5$  Ом,  $R_4=8$  Ом, а  $U=100$  В.

**Решение.** Находим проводимости параллельных ветвей:

$$Z_2^2 = R_2^2 + X_{L2}^2 = 5^2 + 6^2 = 61 \text{ Ом}^2,$$

$$Z_3^2 = R_3^2 + X_C^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \text{ Ом}^2,$$

$$g_2 = \frac{R_2}{Z_2^2} = \frac{5}{61} = 0,082 \text{ См}, \quad g_3 = \frac{R_3}{Z_3^2} = \frac{3}{34} = 0,0882 \text{ См}, \quad g_4 = \frac{1}{R_4} = \frac{1}{8} = 0,125 \text{ См}.$$

$$b_2 = \frac{X_{L2}}{Z_2^2} = \frac{6}{61} = 0,0984 \text{ См}, \quad b_3 = \frac{X_C}{Z_3^2} = \frac{5}{34} = 0,147 \text{ См}, \quad b_4 = 0.$$

Определяем проводимости участка АВ:

$$g_{AB} = g_2 + g_3 + g_4 = 0,082 + 0,0882 + 0,125 = 0,2952 \text{ См},$$

$$b_{AB} = b_2 - b_3 = 0,0984 - 0,147 = -0,0486 \text{ См},$$

$$y_{AB} = \sqrt{g_{AB}^2 + b_{AB}^2} = \sqrt{0,2952^2 + 0,0486^2} = 0,299 \text{ См}.$$

Определяем активную и реактивную составляющие сопротивления участка АВ (рисунок 2.23,в):

$$R_{AB} = g_{AB} / y_{AB}^2 = \frac{0,2952}{0,299^2} = 3,302 \text{ Ом},$$

$$X_{AB} = b_{AB} / y_{AB}^2 = \frac{-0,0486}{0,299^2} = -0,5436 \text{ Ом}.$$

Находим эквивалентное сопротивление цепи.

$$Z_s = \sqrt{R_s^2 + X_s^2} = \sqrt{(R_1 + R_{AB})^2 + (X_{L_1} + X_{AB})^2} = \\ = \sqrt{(2 + 3,302)^2 + (4 - 0,5436)^2} = \sqrt{5,302^2 + 3,4564^2} = 6,325 \text{ Ом.}$$

Определяем действующее значение тока  $I_1$ :

$$I_1 = \frac{U}{Z_s} = \frac{100}{6,325} = 15,81 \text{ А.}$$

## 2.9. Резонанс в электрических цепях

В электрических цепях, содержащих реактивные элементы  $L$  и  $C$ , возможен режим, когда приложенное напряжение и ток на входе цепи совпадают по фазе. Такой режим называется резонансом.

В цепи с последовательным соединением катушки индуктивности и конденсатора возможен резонанс напряжений, а при параллельном соединении указанных элементов может наблюдаться резонанс токов.

**1. Резонанс напряжений.** Пусть последовательный контур, содержащий конденсатор и катушку индуктивности (рисунок 2.24,а) подключен к источнику синусоидального напряжения.

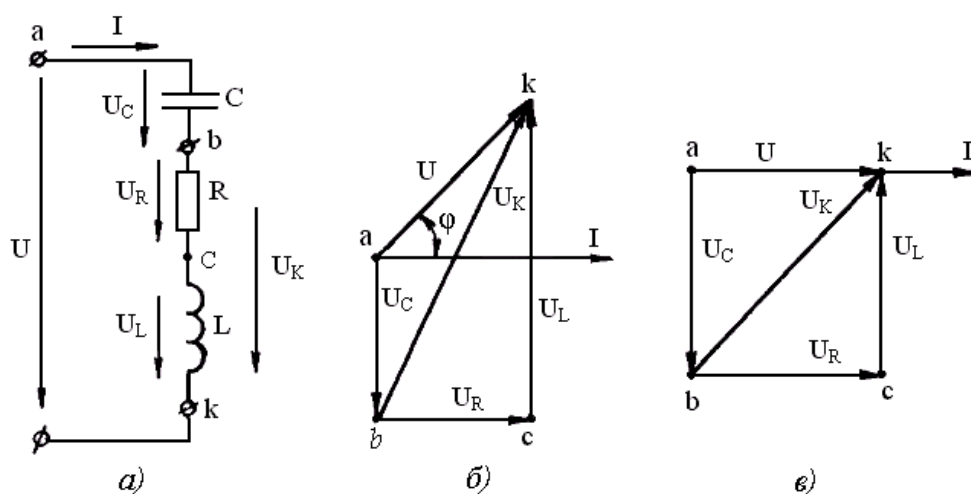


Рисунок 2.24 - Последовательный колебательный контур и векторные диаграммы

Если для этой цепи известны параметры ее и приложенное напряжение, то действующее значение тока, согласно выражению (2.32), определится:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C})^2}},$$

а угол сдвига фаз между током и приложенным напряжением:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R} = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R} = \operatorname{arctg} \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}.$$

Топографическая векторная диаграмма для этой цепи представлена на рисунке 2.24,б. Падения напряжения на элементах цепи, необходимые для построения векторной диаграммы, могут быть найдены из соотношений:

$$U_C = I \cdot X_C = I \frac{1}{\omega \cdot C}, \quad U_L = I \cdot X_L = I \cdot \omega \cdot L, \quad U_R = I \cdot R,$$

$$U_{\kappa} = I \cdot Z_{\kappa} = I \cdot \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2},$$

где  $U_{\kappa}$  – напряжение на катушке индуктивности.

Как уже отмечалось, при резонансе ток и приложенное напряжение должны совпадать по фазе ( $\varphi=0$ ). Из выражения для угла  $\varphi$  следует, что это возможно только при равенстве реактивных сопротивлений индуктивного и емкостного элементов, т.е.

$$X_L = X_C, \quad \text{или} \quad \omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C}. \quad (2.53)$$

Равенство (2.53) является условием резонанса напряжений. Очевидно, что в последовательной цепи (контуре) можно добиться резонанса путем изменения индуктивности  $L$ , емкости  $C$  или частоты  $f$  приложенного напряжения.

Если изменять частоту  $f$  от нуля до бесконечности, то индуктивное сопротивление  $X_L = 2\pi \cdot fL$  будет увеличиваться от нуля до бесконечности, а емкостное  $X_C = \frac{1}{2\pi \cdot fC}$  – уменьшаться от бесконечности до нуля. Очевидно, что при некоторой частоте  $f_0$  эти реактивные сопротивления окажутся равными, т.е.  $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ . Отсюда угловая резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (2.54)$$

а резонансная частота тока в цепи

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Реактивные сопротивления элементов цепи при резонансе можно записать еще и следующим образом:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\sqrt{LC}} L = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

$$\frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Величина  $\sqrt{\frac{L}{C}}$  измеряется в омах и называется характеристическим (волновым) сопротивлением контура и обозначается символом  $\rho$ :

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (2.55)$$

В режиме резонанса полное сопротивление цепи  $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R$ , так как реактивное сопротивление  $X = X_L - X_C = 0$ , т.е. равно активному сопротивлению, наименьшему из всех возможных при изменении частоты. Ток в цепи при резонансе имеет максимальное значение, так как  $I = U/Z = \frac{U}{R}$ , а напряжения на реактивных элементах становятся одинаковыми по величине, т.е.  $U_L = U_C = \omega_0 L \cdot I = \frac{1}{\omega_0 C} I = \rho \cdot I$ , а напряжение на активном сопротивлении равно приложенному.

Векторная диаграмма цепи (рисунок 2.24,а), работающей в режиме резонанса, представлена на рисунке 2.24, в.

Отношение напряжения на реактивных элементах цепи (рисунок 2.24,а) к приложенному

$$\frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{I \cdot \rho}{I \cdot R} = \frac{\rho}{R} = Q. \quad (2.56)$$

Величину  $Q = \rho/R$  называют добротностью цепи (контура). Если параметры цепи таковы, что  $Q > 1$ , то напряжения  $U_L$  и  $U_C$  при резонансе больше напряжения  $U$ , приложенного к цепи. При высоких добротностях в режиме резонанса напряжения на этих элементах могут значительно превосходить приложенное напряжение (в  $Q$  раз).

**2. Резонанс токов.** Резонанс токов может наблюдаться в разветвленной цепи синусоидального тока с параллельным соединением участков, имеющих индуктивный и емкостный характер.

Рассмотрим явление резонанса на примере схемы рисунка 2.22,а.

Так как под резонансом понимают такой режим цепи, когда ток и напряжение на входе ее совпадают по фазе ( $\varphi=0$ ), то условие существования резонанса токов может быть получено из равенства  $\varphi=0$ .

Как следует из векторной диаграммы (рисунок 2.22,в), угол  $\varphi$  между током и напряжением на входе цепи определяется из соотношения:

$$\varphi = \arctg \frac{I_p}{I_a} = \arctg \frac{I_{p1} - I_{p2}}{I_{a1} + I_{a2}}.$$

Нетрудно заметить, что угол  $\varphi$  станет равным нулю в том случае, если реактивные составляющие токов в ветвях станут одинаковыми, т.е.  $I_{p1} = I_{p2}$ . А так как реактивные составляющие токов находятся как  $I_{p1} = b_1 U$ , а  $I_{p2} = b_2 U$ , то условием резонанса токов является равенство реактивных проводимостей ветвей, т.е.

$$b_1 = b_2, \quad \text{или} \quad \frac{\omega \cdot L}{R_1^2 + (\omega \cdot L)^2} = \frac{1}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}. \quad (2.57)$$

Так как при резонансе  $b_1=b_2$ , то полная проводимость цепи в этом случае  $y = \sqrt{(g_1 + g_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} = g_1 + g_2$  будет наименьшей и ток в цепи, являясь чисто активным, будет иметь минимальное значение. При этом токи в параллельных ветвях могут значительно отличаться друг от друга. Векторная диаграмма в режиме резонанса приведена на рисунке 2.25,а.

В случае идеализированной цепи, когда  $R_1=R_2=0$  (рисунок 2.25,б), условие резонанса токов согласно (2.57) совпадает с условием резонанса напряжений, т.е.  $\omega \cdot L = 1/\omega \cdot C$  и угловая резонансная частота  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

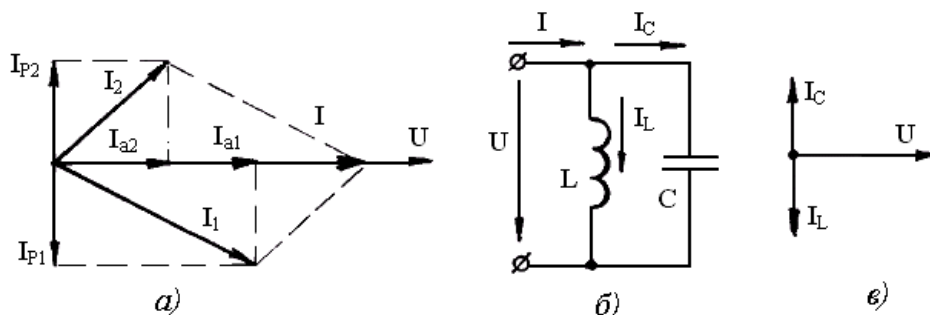


Рисунок 2.25 - К вопросу о резонансе токов

Токи в параллельных ветвях в этом случае будут одинаковы и определяются следующими выражениями:

$$I_C = \frac{U}{1/\omega_0 C} = U \cdot \omega_0 \cdot C = U \frac{C}{\sqrt{LC}} = U \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{U}{\rho},$$

$$I_L = \frac{U}{\omega_0 \cdot L} = U \frac{\sqrt{LC}}{L} = U \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{U}{\rho}.$$

А ток в неразветвленной части цепи, как следует из векторной диаграммы для режима резонанса (рисунок 2.25,в),  $I=0$ , так как токи через индуктивный  $I_L$  и емкостный  $I_C$  элементы равны и противоположны по фазе и их геометрическая сумма равна нулю.

**Пример 2.7.** Пусть в схеме (рисунок 2.24,а) необходимо найти значение емкости  $C$ , добротность контура, мгновенное и действующее значения тока и действующие значения напряжений на элементах цепи  $U_R$ ,  $U_L$  и  $U_C$  в режиме резонанса, имеющего место при угловой резонансной частоте  $\omega_0 = 500 \frac{1}{c}$ , если  $R=40$  Ом,  $L=400$  мГн, а к цепи приложено синусоидальное напряжение  $u=169 \sin \omega t$ .

**Решение.** Из формулы (2.54) для угловой резонансной частоты определяем значение емкости  $C$ , при которой в цепи будет существовать режим резонанса напряжений.

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot L} = \frac{1}{500^2 \cdot 400 \cdot 10^{-3}} = 10 \text{ мкФ}.$$

Как известно, при резонансе полное сопротивление цепи  $Z=R=40$  Ом, а действующее значение тока будет

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{2} \cdot R} = \frac{169}{\sqrt{2} \cdot 40} = 3 \text{ А.}$$

Мгновенное значение тока запишется:

$$i = I_m \sin \omega \cdot t = \sqrt{2} I \sin \omega \cdot t = 4,23 \sin \omega \cdot t.$$

Начальная фазы в мгновенном значении тока равна нулю, так как при резонансе ток и напряжение на входе цепи совпадают по фазе ( $\varphi = 0$ ).

Действующие значения напряжений на элементах цепи:

$$U_R = I \cdot R = 3 \cdot 40 = 120 \text{ В,}$$

$$U_L = I \cdot \omega_0 \cdot L = 3 \cdot 500 \cdot 400 \cdot 10^{-3} = 600 \text{ В,}$$

$$U_C = U_L = 600 \text{ В.}$$

Определив характеристическое сопротивление контура, найдем добротность его:

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{400 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-6}}} = 200 \text{ Ом,}$$

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{200}{40} = 5.$$

**Пример 2.8.** Определить значение индуктивности  $L$ , при которой в цепи (рисунок 2.26,а) имеет место резонанс, если  $R=10$  Ом,  $C=10$  мкФ и к цепи приложено синусоидальное напряжение, частота которого  $f=400$  Гц.

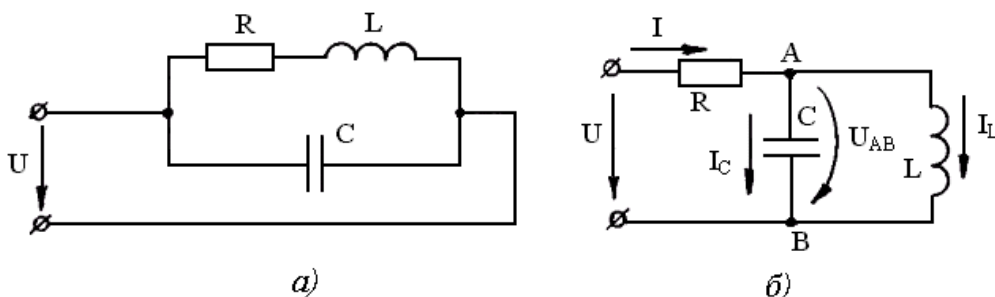


Рисунок 2.26 - Резонанс токов

**Решение.** Очевидно, что, как и в предыдущем примере, для определения значения индуктивности  $L$  необходимо использовать условие резонанса токов (реактивные элементы соединены параллельно), выражающееся в равенстве реактивных проводимостей параллельных ветвей.

Определяем проводимости ветвей. Реактивная проводимость в ветви с индуктивным элементом:

$$b_L = \frac{X_L}{Z_L^2} = \frac{X_L}{R_2^2 + X_L^2}, \text{ а с емкостным:}$$

$$b_c = \frac{X_c}{Z_c^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} = \omega \cdot C.$$

Приравняв проводимости, получим:  $\omega \cdot C = \frac{X_L}{R^2 + X_L^2}$ , или

$$\omega \cdot C(R^2 + X_L^2) = X_L, \text{ откуда } X_L^2 - \frac{X_L}{\omega \cdot C} + R^2 = 0.$$

После подстановки числовых значений будем иметь:

$$X_L^2 - \frac{X_L}{2 \cdot 3,14 \cdot 400 \cdot 10^{-6}} + 100 = 0, \quad X_L^2 - 39,8 \cdot X_L + 100 = 0.$$

Очевидно, что резонанс токов в этой цепи возможен при двух значениях индуктивности. Определим одно из них:

$$X_{L_{1,2}} = 19,9 \pm \sqrt{19,9^2 - 100} = 19,9 \pm 17,2,$$

$X_{L_1} = 19,9 + 17,2 = 37,1$  Ом, а значение индуктивности определится:

$$L_1 = \frac{X_{L_1}}{\omega} = \frac{37,1}{2 \cdot 3,14 \cdot 400} = 14,77 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

**Пример 2.9.** В цепи рисунка 2.26,б имеет место резонанс. Требуется определить действующие значения токов и напряжения  $U_{AB}$ , если приложенное напряжение  $u = 141 \sin(\omega \cdot t - 16^\circ)$  В, а  $R = X_L = X_C = 10$  Ом.

**Решение.** Как уже отмечалось, в идеализированной цепи при резонансе токи в параллельных ветвях одинаковы и находятся в противофазе, поэтому ток в неразветвленной части цепи  $I=0$ . Падение напряжения на активном сопротивлении  $U_R = I \cdot R = 0$  и напряжение  $U_{AB}$  будет равно приложенному, т.е.  $U_{AB} = U_m / \sqrt{2} = 100$  В, а токи в параллельных ветвях:

$$I_L = I_C = \frac{U_{AB}}{X_L} = 10 \text{ А.}$$

## 2.10. Комплексный метод расчета цепей переменного тока

Сложность расчета разветвленных цепей переменного тока обусловлена тем, что необходимо находить не только абсолютные значения электрических величин, но и углы сдвига фаз между ними.

В некоторых случаях решение задачи облегчается построением векторных диаграмм, но при этом не обеспечивается необходимая точность решения.

В электротехнике используется комплексный метод расчета разветвленных цепей переменного тока, который сочетает в себе наглядность векторных диаграмм и обеспечивает желаемую степень точности расчетов.

Комплексный метод основан на формальном изображении синусоидальных электрических величин комплексными числами (символами), что позволяет свести задачу расчета разветвленной цепи к решению

алгебраических уравнений в комплексном виде и использовать при этом известные приемы расчета цепей постоянного тока.

**1. Комплексные числа.** Комплексным числом принято называть сумму вида:

$$\underline{C} = A + jB, \quad (2.58)$$

где  $A$  – действительная (вещественная) часть комплексного числа,  $jB$  – мнимая часть комплексного числа,  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица (в электротехнике, в отличие от математики, не используют обозначение  $i = \sqrt{-1}$  с целью исключения путаницы с обозначением мгновенного значения тока).

Символ, обозначающий комплексное число, в соответствии с ГОСТ 1494-77 подчеркивается снизу чертой.

Вещественную часть комплексного числа кратко записывают как  $A = \text{Re } \underline{C}$  (от латинского слова *Realis* – вещественный), а мнимую –  $B = \text{Im } \underline{C}$  (от латинского слова *Imagarius* – мнимый).

Выражение (2.58) называют алгебраической формой записи комплексного числа.

Комплексные числа графически изображают точками на комплексной плоскости (рисунок 2.27,а). По горизонтальной оси (ось действительных чисел) от начала координат откладывается действительная часть комплексного числа, а по вертикальной (ось мнимых чисел) – мнимая часть.

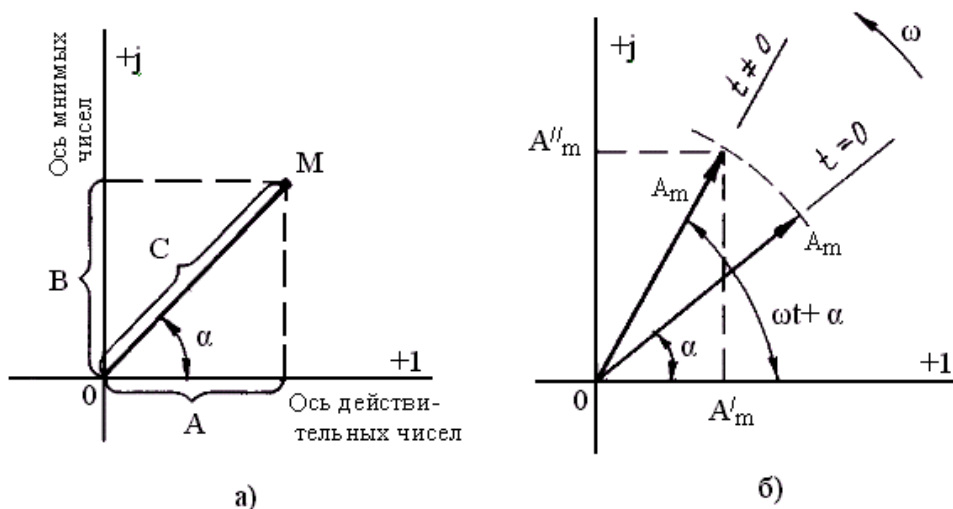


Рисунок 2.27 - Комплексная плоскость

При этом положительные числа откладываются по соответствующим осям вправо и вверх, а отрицательные – влево и вниз от начала координат.

Комплексное число (2.58) можно изобразить точкой  $M$  на комплексной плоскости с абсциссой  $A$  и ординатой  $B$  (рисунок 2.27,а).

Положение точки  $M$  на комплексной плоскости можно также определить отрезком  $OM$  (радиус-вектор) и углом  $\alpha$  между этим отрезком и положительным направлением оси действительных чисел (рисунок 2.27, а).



Длину отрезка  $OM$  называют модулем комплексного числа  $\underline{C}$ . Его значение определяется формулой

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}. \quad (2.59)$$

Угол  $\alpha$ , на который нужно повернуть ось вещественных чисел в положительном направлении (против часовой стрелки) до совпадения с отрезком  $OM$ , называют аргументом комплексного числа  $\underline{C}$ . Согласно рисунку 2.27, а, он определяется как

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{B}{A}. \quad (2.60)$$

Введение этих определений позволяет представить комплексное число в показательной форме записи:

$$\underline{C} = A + jB = Ce^{j\alpha}, \quad (2.61)$$

где  $e$  - основание натуральных логарифмов.

Модуль комплексного числа  $C$  имеет единственное значение, а аргумент  $\alpha$  - бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на  $360^\circ \cdot K$  ( $K$  - любое целое положительное или отрицательное число).

Из рисунка 2.27,а следует, что

$$A = C \cdot \cos \alpha, \quad B = C \cdot \sin \alpha. \quad (2.62)$$

Если эти выражения подставить в формулу (2.58), то получится тригонометрическая форма записи комплексного числа:

$$\underline{C} = A + jB = C \cdot \cos \alpha + jC \cdot \sin \alpha. \quad (2.63)$$

**2. Комплексное изображение синусоиды.** В разделе 2.3 указывалось, что синусоидальную электрическую величину можно представить вращающимся вектором.

Если поместить на комплексную плоскость вектор длиной  $A_m$ , изображающий синусоидальную электрическую величину и вращающийся против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , занимавший в момент времени  $t=0$  угол  $\alpha$  с осью вещественных чисел (рисунок 2.27, б), то через определенное время  $t$  он составит с этой осью угол  $(\omega \cdot t + \alpha)$ . В соответствии с изложенным выше, этот вектор (синусоидальная электрическая величина) можно представить комплексным числом и записать в трех формах записи: алгебраической, тригонометрической и показательной.

$$A_m' + jA_m'' = A_m \cos(\omega \cdot t + \alpha) + jA_m \sin(\omega \cdot t + \alpha) = A_m e^{j(\omega \cdot t + \alpha)}.$$

Отсюда следует, что проекция этого вращающегося вектора на ось мнимых чисел  $A_m''$  изменяется по синусоидальному закону. Это обстоятельство и позволяет представлять синусоидальные электрические величины комплексными числами.

Показательную форму записи комплексного числа можно представить следующим образом:

$$A_m e^{j(\omega \cdot t + \alpha)} = A_m e^{j\alpha} \cdot e^{j\omega \cdot t} = \underline{A}_m e^{j\omega \cdot t},$$

где  $\underline{A}_m = A_m e^{j\alpha}$  - комплексная амплитуда, величина, не зависящая от времени.

Комплекс действующего значения (в дальнейшем будем называть комплексом) синусоидальной функции определится как

$$\underline{A} = \frac{A_m}{\sqrt{2}} = \frac{A_m}{\sqrt{2}} e^{j\alpha} = A e^{j\alpha}. \quad (2.64)$$

Комплексом (2.64) и обозначают в электротехнике синусоидальные электрические величины (напряжение, э.д.с., ток и т.д.), точнее сказать, мнимой частью этого комплекса:

$$A_m \sin(\omega \cdot t + \alpha) = \operatorname{Im} \left[ \sqrt{2} e^{j\alpha} \right]. \quad (2.65)$$

Переход от мгновенного значения электрической величины к ее комплексу осуществляется по формуле 2.64. К примеру, известному мгновенному значению напряжения  $u = 141 \sin(\omega \cdot t - 45^\circ)$  В соответствует следующий комплекс:

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\alpha} = \frac{141}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ} = 100 e^{-j45^\circ} \text{ В.}$$

Формула (2.65) позволяет перейти от комплекса к мгновенному значению электрической величины. Для этого необходимо комплекс умножить на  $\sqrt{2}$ , а также на оператор поворота  $e^{j\omega t}$  и взять мнимую часть получившегося комплекса.

Если, к примеру, известен комплекс тока  $\underline{I} = 10 e^{j30^\circ}$  А, то мгновенное значение этого тока запишется:

$$\begin{aligned} i &= \operatorname{Im} \left[ \sqrt{2} e^{j\omega t} \underline{I} \right] = \operatorname{Im} \left[ 10 e^{j30^\circ} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \right] = \operatorname{Im} \left[ 14,1 e^{j(\omega t + 30^\circ)} \right] \\ &= 14,1 \sin(\omega \cdot t + 30^\circ) \text{ А.} \end{aligned}$$

**3. Алгебраические действия с комплексными числами.** При расчете цепей переменного тока комплексным методом приходится производить алгебраические действия над комплексными числами, изображающими синусоидальные электрические величины. Рассмотрим простые алгебраические действия.

Пусть имеется два комплексных числа  $\underline{C}_1 = A_1 + jB_1 = C_1 e^{j\alpha_1}$  и  $\underline{C}_2 = A_2 + jB_2 = C_2 e^{j\alpha_2}$ , изображающих две синусоидальные электрические величины, над которыми необходимо производить алгебраические действия.

Сложению или вычитанию двух синусоидальных функций соответствует сумма или разность их изображающих комплексов. Эти операции удобнее производить в алгебраической форме записи комплексного числа, отдельно складывая (вычитая) их действительные и мнимые части:

$$\underline{C}_1 \pm \underline{C}_2 = (A_1 + jB_1) \pm (A_2 + jB_2) = (A_1 \pm A_2) + j(B_1 \pm B_2).$$

Умножению синусоидальных функций в комплексной форме соответствует умножение их изображающих комплексов. Эту операцию можно выполнить по правилу умножения многочленов с учетом того, что  $j^2 = -1$ .

$$\begin{aligned} \underline{C}_1 \cdot \underline{C}_2 &= (A_1 + jB_1)(A_2 + jB_2) = A_1 \cdot A_2 + jA_2B_1 + jA_1B_2 + j^2B_1 \cdot B_2 = \\ &= (A_1 \cdot A_2 - B_1 \cdot B_2) + j(A_2B_1 + A_1B_2). \end{aligned}$$

Удобнее выполнять умножение комплексных чисел в показательной форме. При этом модуль произведения равен произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения равен сумме аргументов этих сомножителей:

$$\underline{C}_1 \cdot \underline{C}_2 = C_1 e^{j\alpha_1} \cdot C_2 e^{j\alpha_2} = C_1 \cdot C_2 e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Делению синусоидальных функций соответствует в комплексной форме деление их изображающих комплексов. При делении комплексных чисел в алгебраической форме записи нужно делимое и делитель умножить на сопряженный комплекс делителя и выполнить деление по правилу деления многочлена на действительное число. Сопряженный комплекс отличается от соответствующего комплекса только знаком при мнимой части в алгебраической форме записи или знаком аргумента в показательной форме.

$$\begin{aligned} \frac{\underline{C}_1}{\underline{C}_2} &= \frac{A_1 + jB_1}{A_2 + jB_2} = \frac{(A_1 + jB_1)(A_2 - jB_2)}{(A_2 + jB_2)(A_2 - jB_2)} = \frac{A_1 A_2 + jB_1 A_2 - jA_1 B_2 - j^2 B_1 \cdot B_2}{A_2^2 + jA_2 B_2 - jA_2 B_2 - j^2 B_2^2} = \\ &= \frac{(A_1 A_2 + B_1 \cdot B_2) + j(B_1 A_2 - A_1 B_2)}{A_2^2 + B_2^2} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{A_2^2 + B_2^2} + j \frac{B_1 A_2 - A_1 B_2}{A_2^2 + B_2^2}. \end{aligned}$$

Деление комплексных чисел в алгебраической форме, как видно, требует выполнения достаточно большого объема вычислений. Гораздо проще эта операция выполняется, если комплексные числа представлены в показательной форме записи. Модуль частного от деления двух комплексных чисел равен частному от деления модуля делимого на модуль делителя, а аргумент – алгебраической разности аргументов делимого и делителя:

$$\frac{\underline{C}_1}{\underline{C}_2} = \frac{C_1 e^{j\alpha_1}}{C_2 e^{j\alpha_2}} = \frac{C_1}{C_2} e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

В процессе вычислений в цепях переменного тока иногда необходимо дифференцировать и интегрировать синусоидальные функции электрических величин. Удобнее делать это в комплексной форме.

Найдем комплексное изображение производной функции  $A(t) = A_m \sin(\omega \cdot t + \alpha)$ :

$$A'(t) = \frac{d [A_m \sin(\omega \cdot t + \alpha)]}{dt} = A_m \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) = A_m \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha + \frac{\pi}{2}).$$

Нетрудно заметить, что получившуюся функцию можно рассматривать как мнимую часть комплекса  $A_m \cdot \omega \cdot e^{j(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2})}$ , т.е.:

$$A'(t) = \text{Im}[A_m \cdot \omega \cdot e^{j(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2})}] = \text{Im}[\sqrt{2} A_m \cdot \omega \cdot e^{j\alpha} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}] = \text{Im}[\sqrt{2} \underline{A} \cdot e^{j\omega t} \cdot j\omega],$$

где  $e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = 0 + j1 = j$ .

Таким образом, дифференцированию синусоидальной функции времени электрической величины в комплексной форме соответствует *умножение ее изображающего комплекса на множитель  $j\omega$* .

Аналогично можно показать, что интегрированию синусоидальной функции соответствует в комплексной форме *деление изображающего ее комплекса на  $j\omega$* .

Так как алгебраические действия над комплексными числами удобнее выполнять в той или иной форме записи, то возникает необходимость в переходе от алгебраической формы записи комплексного числа к показательной, или в обратном переходе.

Если необходимо перейти от алгебраической формы записи  $(A+jB)$  к показательной  $Ce^{j\alpha}$ , то по известной вещественной и мнимой частям комплексного числа можно найти модуль и аргумент комплексного числа по формулам (2.59) и (2.60).

Чтобы не допустить ошибки при записи показательной формы, следует сначала качественно представить заданное в алгебраической форме записи комплексное число на комплексной плоскости. Эта оценка позволит правильно выразить угол  $\alpha$  между осью вещественных чисел и радиусом – вектором, изображающим комплексное число (рисунок 2.27,а), через угол  $\psi$ , полученный в результате вычислений по формуле (2.60). Этот угол может быть получен в пределах  $0 \div 90^\circ$ , а аргумент комплексного числа  $\alpha$  может принимать значения от 0 до  $360^\circ$ .

Пусть необходимо представить в показательной форме записи комплексное число  $\underline{C}=A+jB = 4+j3$ . В соответствии с формулой (2.59) модуль комплексного числа определится:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

а угол (обозначим его буквой  $\psi$ ), определенный по формуле (2.60), будет

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{B}{A} = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} = 36,87^\circ.$$

В соответствии с алгебраической формой записи радиус-вектор, изображающий это комплексное число, должен располагаться в первом квадранте комплексной плоскости (рисунок 2.28), ближе к оси вещественных чисел, так как  $|A| > |B|$ . Поэтому  $\alpha = \psi$  и окончательно будем иметь:

$$\underline{C} = 4 + j3 = 5e^{j36,87^\circ}.$$

Показательную форму этого числа можно записать и с отрицательным аргументом:

$$\underline{C} = 4 + j3 = 5e^{-j323,13^\circ}.$$

Если, допустим, требуется записать в показательной форме записи комплексное число  $\underline{C} = -4 + j3$ , то нетрудно заметить, что радиус-вектор, изображающий это комплексное число, находится во втором квадранте ближе к оси вещественных чисел  $(|A| > |B|)$ . Аргумент этого комплексного числа определится как  $\alpha = 180^\circ - \psi = 180^\circ - 36,87^\circ = 143,13^\circ$ , или  $\alpha = -180^\circ - \alpha = -180^\circ - 36,87^\circ = -216,87^\circ$ . В соответствии с этим показательная форма будет иметь вид:

$$\underline{C} = -4 + j3 = 5e^{j143,13^\circ}, \text{ или } \underline{C} = -4 + j3 = 5e^{-j216,87^\circ}.$$

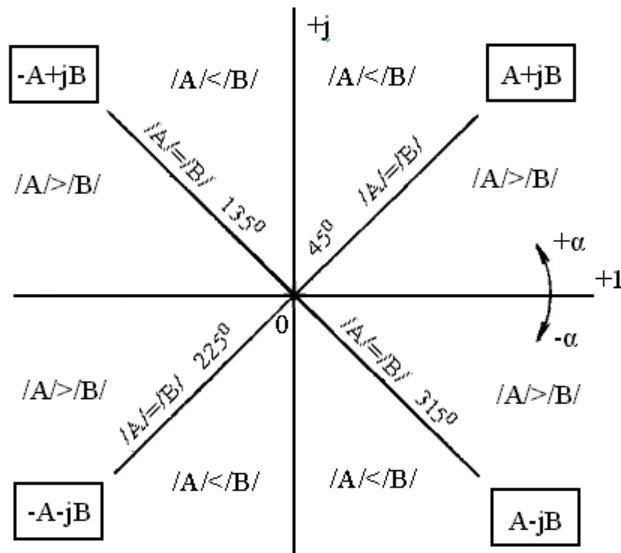


Рисунок 2.28 - К определению положения комплексного числа на комплексной плоскости

При переходе от показательной формы записи комплексного числа  $Ce^{j\alpha}$  к алгебраической необходимо определить вещественную и мнимую части комплексного числа по его известным аргументу и модулю. Это можно сделать по формулам (2.62).

Например, необходимо представить комплексное число  $\underline{C} = 8e^{-j30^\circ}$  в алгебраической форме записи. По формулам (2.62) определяется вещественная и мнимая части комплексного числа:

$$A = C \cdot \cos \alpha = 8 \cdot \cos(-30^\circ) = 6,92 \text{ ,}$$

$$B = C \cdot \sin \alpha = 8 \cdot \sin(-30^\circ) = -4 \text{ .}$$

Алгебраическая форма записи будет:

$$\underline{C} = 6,92 - j4 \text{ .}$$

**4. Закон Ома в комплексной форме.** Пусть в цепи (рисунок 2.13) с последовательным соединением  $R$ ,  $L$  и  $C$ , значения которых известны, необходимо найти комплекс тока  $\underline{I}$  по известному приложенному напряжению  $u = U_m \sin(\omega \cdot t + \alpha)$ .

В соответствии с выражением (2.16) уравнение по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений будет иметь вид:

$$u = u_R + u_L + u_C = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \text{ .} \quad (2.66)$$

Так как в цепи будет протекать синусоидальный ток, то в комплексной форме ему будет соответствовать комплекс тока  $\underline{I}$ , а приложенному напряжению – его комплекс  $\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\alpha} = U e^{j\alpha}$ .

Запишем уравнение (2.66) в комплексной форме:

$$\underline{U} = R \cdot \underline{I} + j\omega \cdot L \cdot \underline{I} + \frac{1}{j\omega \cdot C} \underline{I}.$$

Здесь учтено то обстоятельство, что дифференцированию и интегрированию синусоидальной функции тока, как было сказано выше, соответствует умножение и деление изображающего его комплекса на  $j\omega$ .

Выразим комплекс тока из последнего уравнения:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\omega \cdot L + \frac{1}{j\omega \cdot C}} = \frac{\underline{U}}{R + j(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C})} = \frac{\underline{U}}{R + j(X_L - X_C)} = \frac{\underline{U}}{R + jX} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}. \quad (2.67)$$

Знаменатель выражения (2.67) является комплексным сопротивлением цепи,

$$\text{т.е.} \quad \underline{Z} = R + jX = R + j(X_L - X_C) = R + j(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}). \quad (2.68)$$

Вещественная часть комплексного сопротивления является активным сопротивлением, а мнимая – реактивным.

Комплексное сопротивление можно представить и в показательной форме:

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi}, \quad \text{где} \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2} \text{ - модуль, а аргумент его } \varphi = \text{arctg} \frac{X}{R}.$$

Выражение (2.67), которое является комплексной формой закона Ома, можно записать и следующим образом:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{Ue^{j\alpha}}{Ze^{j\varphi}} = \frac{U}{Z} e^{j(\alpha-\varphi)} = Ie^{j(\alpha-\varphi)}. \quad (2.69)$$

В формулу (2.68) для комплексного сопротивления последовательной цепи  $R, L, C$  входит три слагаемых:  $\underline{Z}_R = R$ ,  $\underline{Z}_L = jX_L = j\omega \cdot L$  и

$$\underline{Z}_C = -jX_C = -j \frac{1}{\omega \cdot C}.$$

Эти комплексные сопротивления складываются алгебраически, емкостные сопротивления берутся с отрицательным знаком.

Таким образом, если требуется последовательно соединенные элементы цепи заменить эквивалентным, то необходимо складывать алгебраически комплексные сопротивления этих элементов:

$$\underline{Z}_\Sigma = \sum_{\kappa=1}^n \underline{Z}_\kappa. \quad (2.70)$$

Аналогичные действия проводились и в цепях постоянного тока, когда при определении эквивалентного сопротивления последовательного соединения резисторов (1.5) складывались сопротивления этих резисторов.

Величина, обратная комплексному сопротивлению, есть его комплексная проводимость:

$$\begin{aligned} \underline{y} &= \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Ze^{j\varphi}} = ye^{-j\varphi} = y \cos(-\varphi) + jy \sin(-\varphi) = \\ &= y \cos \varphi - jy \sin \varphi = g - jb. \end{aligned} \quad (2.71)$$

В формуле (2.71) модуль комплексной проводимости определяется как  $y = \sqrt{g^2 + b^2}$ , а аргумент  $\varphi = \arctg \frac{b}{g}$  равен углу сдвига фаз между напряжением и током.

Если в цепи переменного тока соединены последовательно резистор и индуктивный элемент ( $X_C = 0$ ), то в соответствии с формулой (2.68) комплексное сопротивление

$$\underline{Z} = R + jX_L = R + j\omega \cdot L = Ze^{j\varphi} = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2} e^{j \arctg \frac{\omega \cdot L}{R}},$$

а комплексная проводимость определится как

$$\begin{aligned} \underline{y} = \frac{1}{\underline{Z}} &= \frac{1}{R + jX_L} = \frac{R - jX_L}{(R + jX_L)(R - jX_L)} = \frac{R - jX_L}{R^2 + X_L^2} = \frac{R - jX_L}{Z^2} = \\ &= \frac{R}{Z^2} - j \frac{X_L}{Z^2} = g - jb. \end{aligned}$$

Комплексное сопротивление последовательного соединения  $R$  и  $C$  ( $X_L = 0$ ) определяется как

$$\underline{Z} = R - jX_C = R - j \frac{1}{\omega \cdot C} = Ze^{-j\varphi} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} e^{-j \arctg \frac{1}{\omega \cdot C}},$$

а комплексная проводимость:

$$\begin{aligned} \underline{y} = \frac{1}{\underline{Z}} &= \frac{1}{R - jX_C} = \frac{R + jX_C}{(R - jX_C)(R + jX_C)} = \frac{R + jX_C}{R^2 + X_C^2} = \frac{R + jX_C}{Z^2} = \\ &= \frac{R}{Z^2} + j \frac{X_C}{Z^2} = g + jb. \end{aligned}$$

Закон Ома в комплексной форме можно записать и через проводимости:

$$\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{y} = Ue^{j\alpha} \cdot ye^{-j\varphi} = U \cdot y \cdot e^{j(\alpha - \varphi)} = Ie^{j(\alpha - \varphi)}. \quad (2.72)$$

**5. Законы Кирхгофа в комплексной форме.** Ранее отмечалось, что законы Кирхгофа применимы для действующих значений электрических величин, но при геометрическом сложении их изображающих векторов. А так как действиям над векторами в комплексной форме соответствуют алгебраические операции над комплексными числами, то комплексный метод позволяет применить все законы и соотношения, известные из цепей постоянного тока, к расчету цепей синусоидального тока. При этом специфика записи уравнений практически остается такой же.

Тогда первый закон Кирхгофа в комплексной форме можно сформулировать так: *алгебраическая сумма комплексов токов ветвей, сходящихся в узле, равна нулю.*

$$\sum_{\kappa=1}^n \underline{I}_{\kappa} = 0. \quad (2.73)$$

Уравнение по первому закону Кирхгофа в комплексной форме для узла (рисунок 2.29,а) будет иметь вид:

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 + \underline{I}_3 - \underline{I}_4 - \underline{I}_5 = 0.$$

Второй закон Кирхгофа в комплексной форме можно сформулировать следующим образом: в любом замкнутом контуре разветвленной цепи алгебраическая сумма комплексов напряжений на отдельных элементах контура равна алгебраической сумме комплексов э.д.с., действующих в этом контуре.

$$\sum_{\kappa=1}^n \underline{U}_{\kappa} = \sum_{\kappa=1}^n \underline{E}_{\kappa}, \quad \text{или}$$

$$\sum_{\kappa=1}^n \underline{I}_{\kappa} \cdot \underline{Z}_{\kappa} = \sum_{\kappa=1}^n \underline{E}_{\kappa}. \quad (2.74)$$

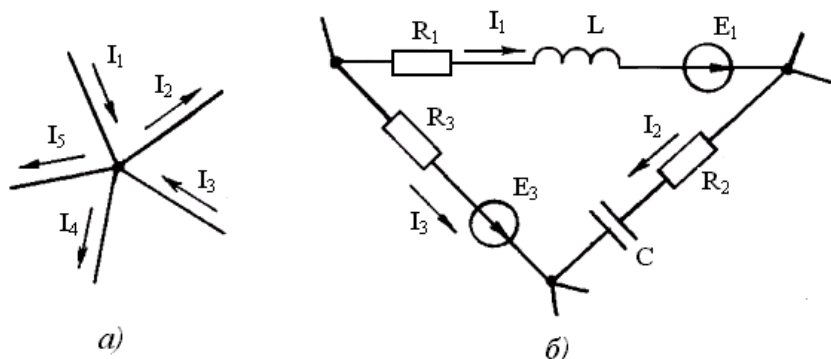


Рисунок 2.29 - Иллюстрация к уравнениям Кирхгофа в комплексной форме

Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа в комплексной форме для контура рисунка 2.29,б.

$$\underline{U}_{R_1} + \underline{U}_L + \underline{U}_{R_2} + \underline{U}_C - \underline{U}_{R_3} = \underline{E}_1 - \underline{E}_3.$$

Это уравнение можно представить в другом виде, если в соответствии с выражением (2.74) комплексы напряжений расписать как произведения комплексов токов на соответствующие комплексные сопротивления, т.е.:

$$\underline{I}_1 \cdot R_1 + \underline{I}_1 \cdot jX_L + \underline{I}_2 R_2 + \underline{I}_2 (-jX_C) - \underline{I}_3 \cdot R_3 = \underline{E}_1 - \underline{E}_3.$$

Сгруппировав члены уравнения, получим:

$$\underline{I}_1 (R_1 + jX_L) + \underline{I}_2 (R_2 - jX_C) - \underline{I}_3 R_3 = \underline{E}_1 - \underline{E}_3.$$

Полученное уравнение можно записать и следующим образом:

$$\underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{I}_3 \cdot \underline{Z}_3 = \underline{E}_1 - \underline{E}_3,$$

где  $\underline{Z}_1 = (R_1 + jX_L)$ ,  $\underline{Z}_2 = (R_2 - jX_C)$ ,  $\underline{Z}_3 = R_3$  соответственно комплексные сопротивления первой, второй и третьей ветвей.

**6. Мощность переменного тока в комплексной форме.** Если в разветвленной цепи синусоидального тока известны комплекс тока  $\underline{I} = Ie^{j\alpha}$  на входе ее и комплекс приложенного напряжения  $\underline{U} = Ue^{j(\alpha+\varphi)}$ , то можно определить мощность, поступающую в нее. Для этого необходимо перемножить комплекс напряжения на сопряженный комплекс тока:

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = Ue^{j(\alpha+\varphi)} \cdot Ie^{-j\alpha} = UIe^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi, \quad (2.75)$$



где  $\underline{S}$  – комплексная полная мощность. Звездочкой у тока обозначают комплексную величину, сопряженную с комплексом тока  $I$ .

Из выражения (2.75) следует, что действительная часть комплекса полной мощности представляет собой активную мощность ( $Re\underline{S} = P$ ), поступающую в цепь, а мнимая часть – реактивную ( $Im\underline{S} = Q$ ).

Если мнимая часть выражения (2.75) положительна, то цепь имеет индуктивный характер. Если же она отрицательна, то характер цепи – емкостный.

Действительно, если цепь имеет емкостный характер ( $\underline{I} = Ie^{j\alpha}, \underline{U} = Ue^{j(\alpha-\varphi)}$ ), то комплекс полной мощности

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = Ue^{j(\alpha-\varphi)} Ie^{-j\alpha} = UIe^{-j\varphi} = UI \cos \varphi - jUI \sin \varphi.$$

Результат расчета в цепях переменного тока обычно проверяется также составлением баланса мощностей, только здесь он распадается на два равенства – равенство по активной и равенство по реактивной мощностям, т.е.

$$P_u = P_n, \quad Q_u = Q_n.$$

Мощности  $P_u$  и  $Q_u$ , поступающие в цепь, определяются из выражения (2.75), а мощности на пассивных элементах схемы находятся по следующим формулам:

$$P_n = \sum_{k=1}^n I_k^2 \cdot R_k, \quad Q_n = \sum_{k=1}^n I_k^2 \cdot X_k \quad (2.76)$$

Последняя сумма алгебраическая, реактивные мощности емкостных элементов входят с отрицательным знаком.

**7. Расчет сложных цепей комплексным методом.** Обычно при расчете линейных электрических цепей синусоидального тока используют их комплексные схемы замещения, в которых все источники электрической энергии, а также сопротивления ветвей представляются своими комплексными значениями. В ветвях таких схем протекают комплексы токов, а на пассивных элементах существуют комплексы падений напряжений.

Расчет этих схем замещения проводится любыми методами, известными из расчета линейных цепей постоянного тока. Положительные направления электрических величин выбираются аналогично тому, как это делается при расчете цепей постоянного тока.

Ниже приведены примеры расчета цепей комплексным методом.

**Пример 2.10.** По данным примера 2.6 определить ток  $I_1$  комплексным методом.

**Решение.** Комплексная схема замещения исходной цепи (рисунок 2.23,а) представлена на рисунке 2.30,а.

Комплексные сопротивления ветвей этой схемы:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L_1} = 2 + j4 = 4,472e^{j63,43^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L_2} = 5 + j6 = 7,81e^{j50,19^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 - jX_C = 3 - j5 = 5,83e^{-j59,04^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_4 = R_4 = 8 \text{ Ом.}$$

Так как цепь с одним источником электрической энергии, то для нахождения тока  $\underline{I}_1$  удобнее преобразовать схему до одной эквивалентной ветви с ее комплексным сопротивлением  $\underline{Z}_3$  (рисунок 2.30,в). Для этого сначала вторую и третью ветви, соединенные параллельно, заменим эквивалентной. В соответствии с формулой (1.9) будем иметь:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{23} &= \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{7,81e^{j50,19^\circ} \cdot 5,83e^{-j59,04^\circ}}{5 + j6 + 3 - j5} = \frac{45,532e^{-j8,85^\circ}}{8 + j1} = \\ &= \frac{45,532e^{-j8,85^\circ}}{8,062e^{j7,125^\circ}} = 5,647e^{-j15,975^\circ} = (5,43 - j1,554) \text{ Ом.} \end{aligned}$$

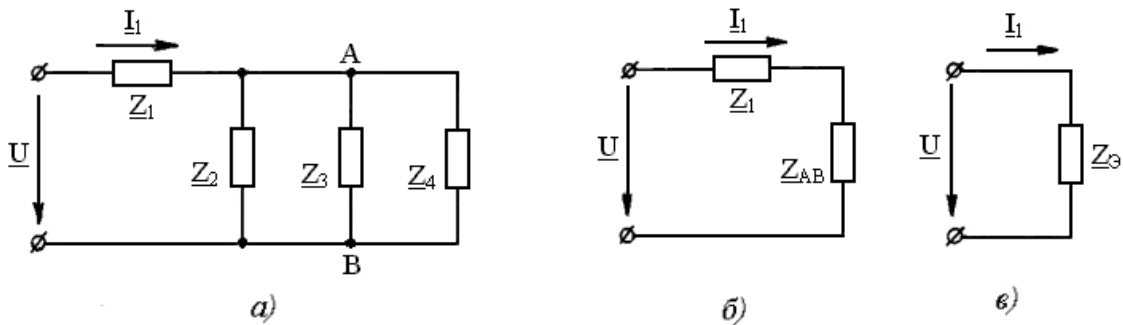


Рисунок 2.30 - Комплексная схема замещения

Эквивалентное комплексное сопротивление параллельно соединенных ветвей  $\underline{Z}_{AB}$  (рисунок 2.30,б) определится:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{AB} &= \frac{\underline{Z}_{23} \cdot \underline{Z}_4}{\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_4} = \frac{5,647e^{-j15,975^\circ} \cdot 8}{5,43 - j1,554 + 8} = \frac{45,176 - j15,975}{13,43 - j1,554} = \\ &= \frac{45,176e^{-j15,975^\circ}}{13,52e^{-j6,6^\circ}} = 3,342e^{-j9,38^\circ} = (3,297 - j0,5447) \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Это сопротивление можно было бы получить, если сложить комплексы проводимостей параллельных ветвей.

$$\begin{aligned} \underline{y}_{AB} &= \underline{y}_2 + \underline{y}_3 + \underline{y}_4 = \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_4} = \frac{1}{7,81e^{j50,19^\circ}} + \frac{1}{5,83e^{-j59,04^\circ}} + \frac{1}{8} = \\ &= 0,128e^{-j50,19^\circ} + 0,1715e^{j59,04^\circ} + 0,125 = 0,082 - j0,0983 + 0,0882 + j0,1471 + 0,125 = \\ &= 0,2952 + j0,0488 = 0,2992e^{j9,38^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{1}{\underline{y}_{AB}} = \frac{1}{0,2992e^{j9,38^\circ}} = 3,342e^{-j9,38^\circ} \text{ Ом.}$$

Так как  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_{AB}$  соединены последовательно, то комплекс эквивалентного сопротивления цепи:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_3 &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{AB} = 2 + j4 + 3,297 - j0,5447 = \\ &= 5,297 + j3,455 = 6,324e^{j33,12^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Комплекс тока  $\underline{I}_1$  определится из аналога закона Ома (2.67) в комплексной форме:

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{\underline{Z}_3} = \frac{100}{6,324 e^{j33,12^\circ}} = 15,81 e^{-j33,12^\circ} \text{ А.}$$

Действующее значение тока – это взятый по модулю его комплекс.

$$I_1 = |\underline{I}_1| = 15,81 \text{ А.}$$

Нетрудно увидеть, что комплексный метод менее трудоемкий по сравнению с методом проводимостей (пример 2.6).

**Пример 2.11.** В схеме (рисунок 2.31,а) определить токи в ветвях и приложенное напряжение  $U$ , если  $L=0,01274$  Гн,  $L_1=0,02548$  Гн,  $C=366$  мкФ,  $R_1=6$  Ом,  $R_2=5$  Ом,  $f=50$  Гц, а напряжение на параллельных ветвях  $U_{AB}=120$  В.

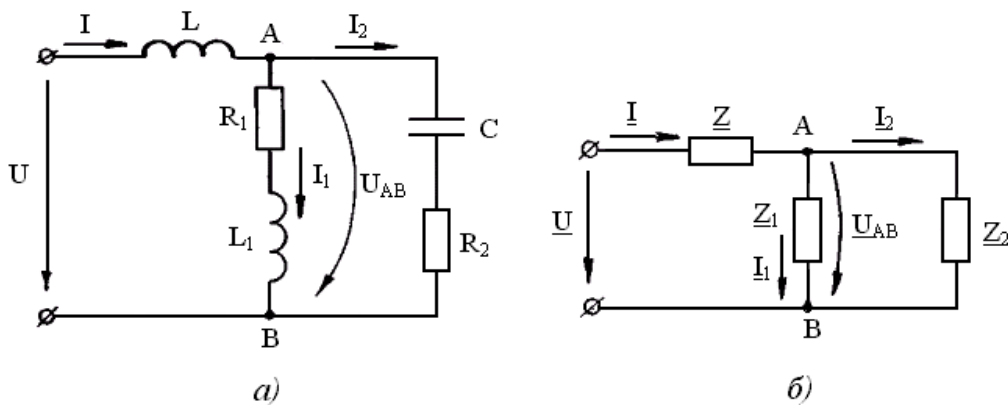


Рисунок 2.31 - Электрическая цепь и комплексная схема замещения

**Решение.** Реактивные сопротивления ветвей:

$$X_L = \omega \cdot L = 2\pi \cdot f \cdot L = 314 \cdot 0,01274 = 4 \text{ Ом,}$$

$$X_{L_1} = \omega \cdot L_1 = 2\pi \cdot f \cdot L_1 = 314 \cdot 0,02548 = 8 \text{ Ом,}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{314 \cdot 366 \cdot 10^{-6}} = 5 \text{ Ом.}$$

Определяем комплексные сопротивления ветвей схемы замещения (рисунок 2.31.б):

$$\underline{Z} = jX_L = j4 = 4e^{j90^\circ} \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L_1} = 6 + j8 = 10e^{j53,13^\circ} \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 - jX_C = 5 - j5 = 7,07e^{-j45^\circ} \text{ Ом.}$$

Токи в параллельных ветвях можно определить по закону Ома, так как известно напряжение на них, т.е.:

$$\underline{I}_1 = \frac{U_{AB}}{\underline{Z}_1} = \frac{120}{10e^{j53,13^\circ}} = 12e^{-j53,13^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{U_{AB}}{\underline{Z}_2} = \frac{120}{7,07e^{-j45^\circ}} = 16,97e^{j45^\circ} \text{ А,}$$

а ток в неразветвленной части цепи – по первому закону Кирхгофа в комплексной форме:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 7,2 - j9,6 + 12 + j12 = 19,2 + j2,4 = 19,35e^{j7,12^\circ} \text{ А.}$$

Комплекс приложенного напряжения определим из уравнения по второму закону Кирхгофа в комплексной форме для левого контура:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{I} \cdot \underline{Z} + \underline{U}_{AB} = 19,35e^{j7,12^\circ} \cdot 4e^{j90^\circ} + 120 = 77,4e^{j97,12^\circ} + 120 = \\ &= -9,59 + j76,803 + 120 = 110,41 + j76,803 = 134,5e^{j34,8^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Действующее значение этого напряжения:

$$U = |\underline{U}| = 134,5 \text{ В.}$$

Результат расчета проверим составлением баланса мощностей. Мощность, поступающая в схему:

$$\begin{aligned} \underline{S}_u &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 134,5e^{j34,8^\circ} \cdot 19,35e^{-j7,12^\circ} = 2602e^{j27,68^\circ} = 2304 + j1210, \\ P_u &= 2304 \text{ Вт,} & Q_u &= 1210 \text{ вар.} \end{aligned}$$

Мощность, потребленная схемой:

$$\begin{aligned} P_n &= I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 = 12^2 \cdot 6 + 16,97^2 \cdot 5 = 2304 \text{ Вт,} \\ Q_n &= I_1^2 \cdot X_{L_1} + I^2 \cdot X_L - I_2^2 \cdot X_C = 12^2 \cdot 8 + 19,35^2 \cdot 4 - 16,97^2 \cdot 5 = 1208 \text{ вар.} \end{aligned}$$

**Пример 2.12.** Для цепи (рисунок 2.32,а) по известным значениям э.д.с.  $e_1 = 14 \sin(\omega \cdot t + 75^\circ) \text{ В}$ ,  $e_3 = 28 \sin(\omega \cdot t + 25^\circ) \text{ В}$  и параметрами  $C_1 = 12,5 \text{ мкФ}$ ,  $C_3 = 88,4 \text{ мкФ}$ ,  $R_2 = 65 \text{ Ом}$ ,  $L_3 = 26,3 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$ ,  $f = 200 \text{ Гц}$ , определить токи в ветвях: а) методом контурных токов; б) методом двух узлов; в) методом наложения; г) определить ток  $I_1$  методом эквивалентного генератора. Составить баланс мощностей и построить топографическую векторную диаграмму напряжений, совмещенную с векторной диаграммой токов.

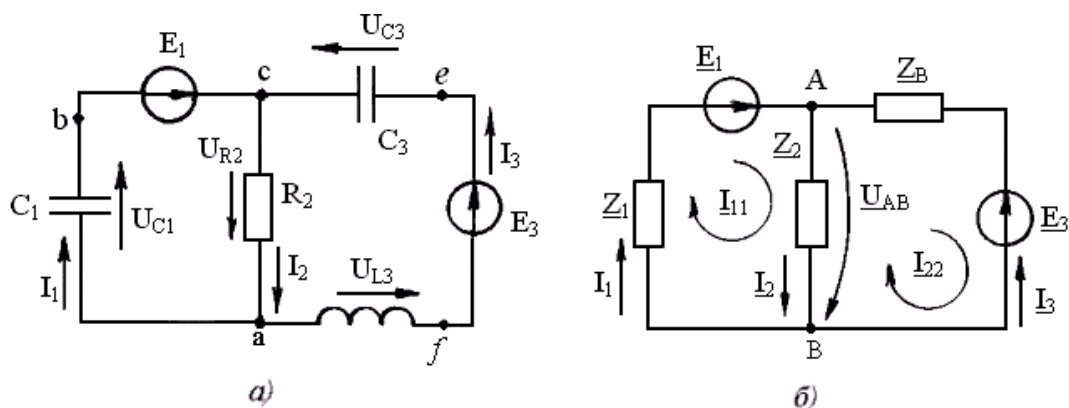


Рисунок 2.32 - Схема цепи и ее комплексная схема замещения

**Решение.** Определяем комплексы э.д.с. и комплексные сопротивления ветвей схемы замещения (рисунок 2.32,б).

$$\underline{E}_1 = \frac{E_{1m}}{\sqrt{2}} e^{j\alpha} = \frac{14}{\sqrt{2}} e^{j75^\circ} = 9,9e^{j75^\circ} \text{ В}, \quad \underline{E}_3 = \frac{E_{3m}}{\sqrt{2}} e^{j\alpha} = \frac{28}{\sqrt{2}} e^{j25^\circ} = 19,8e^{j25^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{Z}_1 = -jX_{C_1} = -j \frac{1}{\omega \cdot C_1} = -j \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C_1} = -j \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 200 \cdot 12,5 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= -j63,66 = 63,66e^{-j90^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 = 65 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = jX_{L_3} - jX_{C_3} = j\omega \cdot L_3 - j \frac{1}{\omega \cdot C_3} =$$

$$= j \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 200 \cdot 26,3 \cdot 10^{-3} - j \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 200 \cdot 88,4 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= j33 - j9 = 24e^{j90^\circ} \text{ Ом}.$$

а) В соответствии с выбранным направлением контурных токов (рисунок 2.32,б) система уравнений по методу контурных токов в комплексной форме будет иметь вид:

$$\underline{I}_{11}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) - \underline{I}_{22} \cdot \underline{Z}_2 = \underline{E}_1;$$

$$- \underline{I}_{11} \underline{Z}_2 + \underline{I}_{22}(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = -\underline{E}_3.$$

Подставив в уравнения числовые значения, получим два уравнения с двумя неизвестными контурными токами:

$$\underline{I}_{11}(-j63,66 + 65) - \underline{I}_{22} \cdot 65 = 9,9e^{j75^\circ};$$

$$- \underline{I}_{11} \cdot 65 + \underline{I}_{22}(65 + j24) = -19,8e^{j25^\circ}.$$

Решив совместно уравнения, получим значения контурных токов:

$$\underline{I}_{11} = 0,413e^{-j127,12^\circ} \text{ А}; \quad \underline{I}_{22} = 0,654e^{j200,83^\circ} \text{ А}.$$

Определяем действительные токи в ветвях:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} = 0,413e^{-j127,12^\circ} \text{ А}, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{11} - \underline{I}_{22} = 0,413e^{-j127,12^\circ} - 0,654e^{j200,83^\circ} = 0,374e^{-j15^\circ} \text{ А}.$$

$$\underline{I}_3 = -\underline{I}_{22} = -0,654e^{j200,83^\circ} = 0,654e^{j20,83^\circ} \text{ А}.$$

б) Напряжение между узлами А и В можно определить по формуле (1.22) из цепей постоянного тока, но при комплексных значениях всех величин:

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_3}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}} = \frac{\frac{9,9e^{j75^\circ}}{63,66e^{-j90^\circ}} + \frac{19,8e^{j25^\circ}}{24e^{j90^\circ}}}{\frac{1}{63,66e^{-j90^\circ}} + \frac{1}{65} + \frac{1}{24e^{j90^\circ}}} =$$

$$= \frac{0,1555e^{j165^\circ} + 0,825e^{-j65^\circ}}{0,01572e^{j90^\circ} + 0,01538 + 0,04166e^{-j90^\circ}} =$$

$$= \frac{0,1983 - j0,7074}{0,01538 - j0,026} = \frac{0,7347e^{-j74,34^\circ}}{0,03016e^{-j59,34^\circ}} = 24,36e^{-j15^\circ} \text{ В}.$$

Определяем токи в ветвях:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_2} = \frac{24,36e^{-j15^\circ}}{65} = 0,374e^{-j15^\circ} \text{ А}.$$

$$\underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 + \underline{U}_{AB} = \underline{E}_1, \text{ откуда } \underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1 - \underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_1} = \frac{9,9e^{j75^\circ} - 24,36e^{-j15^\circ}}{63,63e^{-j90^\circ}} = 0,413e^{-j127,12^\circ} \text{ А}.$$

$$I_3 = \frac{E_3 - U_{AB}}{Z_3} = \frac{19,8e^{j25^\circ} - 24,36e^{-j15^\circ}}{24e^{j90^\circ}} = 0,654e^{j20,83^\circ} \text{ A.}$$

в) По методу наложения исходную схему (рисунок 2.32,б) разбиваем на две подсхемы с одним источником э.д.с. в каждой (рисунок 2.33).

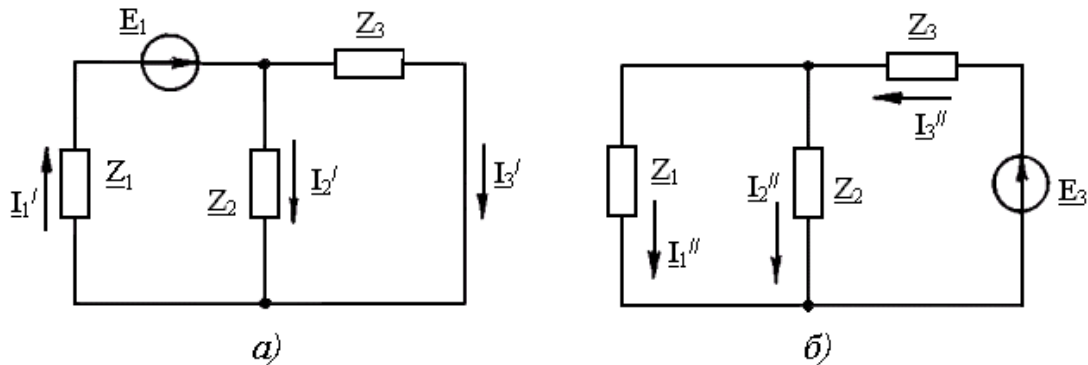


Рисунок 2.33 - Иллюстрация к методу наложения

Для схемы (рисунок 2.33, а) будем иметь:

$$I_1' = \frac{E_1}{Z_3} = \frac{E_1}{Z_1 + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}} = \frac{9,9e^{j75^\circ}}{-j63,66 + \frac{65 \cdot 24e^{j90^\circ}}{65 + j24}}$$

$$= -0,207 + j \cdot 0,0988 = 0,229e^{j154,6^\circ} \text{ A.}$$

$$I_2' = I_1' \frac{Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{0,229e^{j154,6^\circ} \cdot 24e^{j90^\circ}}{65 + j24} = (-0,0568 - j0,0555) \text{ A;}$$

$$I_3' = I_1' - I_2' = -0,207 + j0,0988 + 0,0568 + j0,0555 = (-0,15 + j0,154) \text{ A.}$$

Аналогично рассчитываем токи (рисунок 2.33,б) от действия только э.д.с.

$E_3$ .

$$I_3'' = \frac{E_3}{Z_3} = \frac{E_3}{Z_3 + \frac{Z_2 \cdot Z_1}{Z_2 + Z_1}} = \frac{19,8e^{j25^\circ}}{j \cdot 24 + \frac{65 \cdot 63,66e^{-j90^\circ}}{65 - j \cdot 63,66}}$$

$$= 0,461 + j \cdot 0,385 = 0,601e^{j39,9^\circ} \text{ A.}$$

$$I_2'' = \frac{I_3'' \cdot Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{0,601e^{j39,9^\circ} \cdot 63,66e^{-j90^\circ}}{65 - j \cdot 63,66} = (0,418 - j \cdot 0,0417) \text{ A;}$$

$$I_1'' = I_3'' - I_2'' = 0,461 + j \cdot 0,385 - 0,418 + j \cdot 0,0417 = (0,043 + j \cdot 0,427) \text{ A.}$$

Токи в ветвях заданной цепи равны алгебраической сумме токов в ветвях от действия каждой э.д.с. в отдельности:

$$I_1 = I_1' - I_1'' = -0,207 + j \cdot 0,0988 - (0,043 + j \cdot 0,427) = 0,413e^{-j127,12^\circ} \text{ A.}$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' = -0,0568 - j \cdot 0,0555 + 0,418 - j \cdot 0,0417 =$$

$$= 0,361 - j \cdot 0,0972 = 0,375e^{-j15^\circ} \text{ A.}$$

$$I_3 = I_3'' - I_3' = 0,461 + j0,385 - (-0,15 + j0,154) = 0,611 + j0,231 =$$

$$= 0,654e^{j20,8^\circ} \text{ A.}$$

г) По методу эквивалентного генератора можно записать, что

$$I_1 = \frac{\underline{E}_r = \underline{U}_{xx}}{\underline{Z}_r + \underline{Z}_1}.$$

Э.д.с. эквивалентного генератора  $\underline{E}_r$ , как следует из схемы рисунка 2.34,а, можно определить из уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{xx} + \underline{I}'_2 \cdot \underline{Z}_2 &= \underline{E}_1, \\ \underline{U}_{xx} &= \underline{E}_1 - \underline{I}'_2 \cdot \underline{Z}_2 = \underline{E}_1 - \frac{\underline{E}_3 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 9,9e^{j75^\circ} - \frac{19,8e^{j25^\circ} \cdot 65}{65 + j24} = \\ &= 17,875 e^{j153,27^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

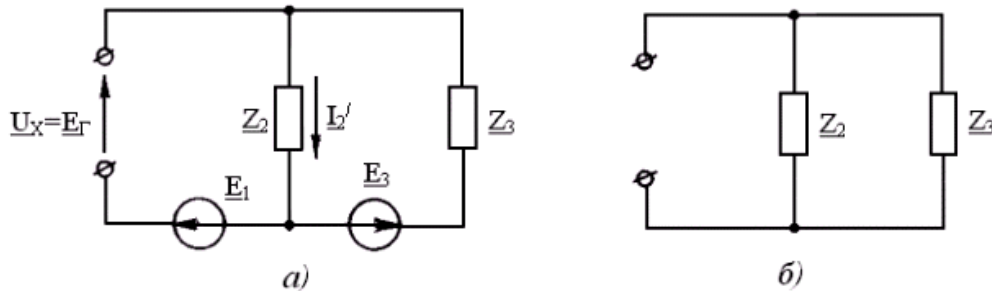


Рисунок 2.34 - Схемы для нахождения  $\underline{E}_r$  и  $\underline{Z}_r$

Сопротивление эквивалентного генератора (рисунок 2.34, б) определится:

$$\underline{Z}_r = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{65 \cdot 24e^{j90^\circ}}{65 + j24} = 7,825 + j21,153 = 22,554e^{j69,7^\circ} \text{ Ом.}$$

Ток первой ветви:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\underline{U}_{xx}}{\underline{Z}_r + \underline{Z}_1} = \frac{17,875 e^{j153,27^\circ}}{7,825 + j21,153 - j63,66} = \frac{17,875 e^{j153,27^\circ}}{43,223 e^{-j79,61^\circ}} = \\ &= 0,413 e^{j232,88^\circ} = 0,413 e^{-j127,12^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Составим баланс мощностей. Определяем мощности источников:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{E}_1 \cdot \underline{I}_1^* + \underline{E}_3 \underline{I}_3^* = 9,9e^{j75^\circ} \cdot 0,413e^{j127,12^\circ} + 19,8e^{j25^\circ} \cdot 0,654e^{-j20,83^\circ} = \\ &= (9,12 - j0,59) \text{ ВА} \end{aligned}$$

Активная мощность источников  $P_u = 9,12$  Вт, а реактивная мощность  $Q_u = 0,59$  вар.

Активная мощность, потребленная в схеме:

$$P_n = I_2^2 \cdot R_2 = 0,374^2 \cdot 65 = 9,1 \text{ Вт.}$$

Реактивная мощность потребителей в схеме:

$$Q_n = -I_1^2 \cdot X_1 + I_3^2 X_3 = -0,413^2 \cdot 63,66 + 0,654^2 \cdot 24 = -0,59 \text{ вар.}$$

Топографическая векторная диаграмма напряжений отличается от обычной векторной диаграммы тем, что на ней откладывают комплексы (векторы) падений напряжений строго в той последовательности, как соответствующие элементы соединены на схеме. Каждый последующий вектор должен откладываться с конца предыдущего. Переносить векторы параллельно

самим себе на векторной диаграмме не разрешается. Каждой точке цепи соответствует своя точка на диаграмме, при этом построение можно начать с произвольной точки цепи, поместив ее в начало координат комплексной плоскости.

Для построения векторной диаграммы напряжений необходимо предварительно определить комплексы напряжений на пассивных элементах цепи.

$$\underline{U}_{C_1} = \underline{I}_1(-jX_{C_1}) = 0,413e^{-j127,12^\circ} \cdot 63,66e^{-j90^\circ} = 26,3e^{-j217,12^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{C_3} = \underline{I}_3(-jX_{C_3}) = 0,654e^{j20,8^\circ} \cdot 9e^{-j90^\circ} = 5,89e^{-j69,2^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{L_3} = \underline{I}_3jX_{L_3} = 0,654e^{j20,8^\circ} \cdot 33e^{j90^\circ} = 21,61e^{j110,8^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{R_2} = \underline{I}_2R_2 = \underline{U}_{AB} = 24,36e^{-j15^\circ} \text{ В}.$$

Топографическую векторную диаграмму напряжений, совмещенную с диаграммой токов, строим в следующем порядке.

Сначала изображаем лучевую диаграмму токов (рисунок 2.35), отложив на комплексной плоскости комплексы токов  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$ ,  $\underline{I}_3$  и выбрав масштаб по току  $m_I=0,1 \text{ А/см}$ .

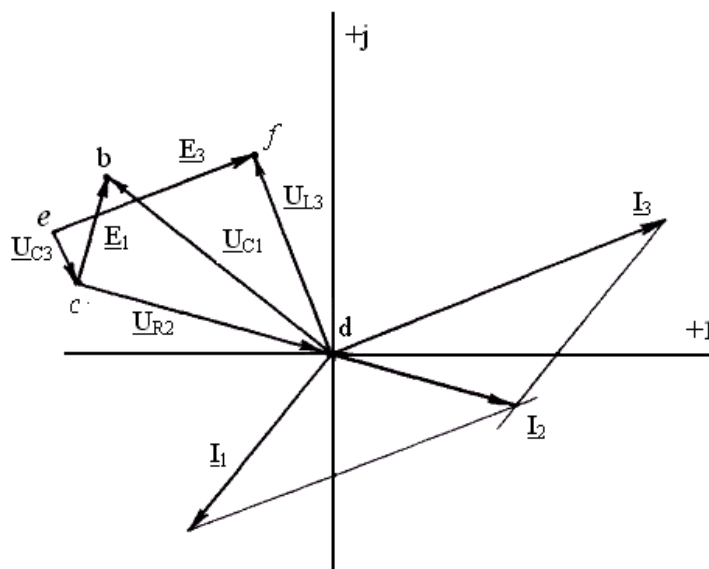


Рисунок 2.35 - Топографическая векторная диаграмма напряжений, совмещенная с диаграммой токов

Далее изображаем векторы напряжений, начиная с точки  $a$ , которую помещаем в начало координат. Масштаб по напряжению -  $m_u=5 \text{ В/см}$ . Здесь особое внимание надо обратить на построение комплекса  $\underline{U}_{R_2}$ . Вектор, изображающий это напряжение, должен своим концом быть направлен к точке  $a$ , как это следует из схемы рисунка 2.32.

Построенная описанным способом векторная диаграмма напряжений позволяет найти комплекс напряжения между двумя любыми точками цепи. К примеру, если необходимо определить напряжение  $\underline{U}_{cf}$ , то для этого следует соединить отрезком на диаграмме точки  $c$  и  $f$ . Модуль комплекса этого напряжения равен длине отрезка  $\overline{cf}$  в выбранном масштабе, т.е.



$\underline{U}_{cf} = \overline{cf} \cdot m_u = 4\text{cm} \cdot 5\text{B}/\text{cm} = 20\text{B}$ , а аргумент его  $\alpha$  равен углу между отрезком  $\overline{cf}$  и осью вещественных чисел (на диаграмме угол  $\alpha = 40^\circ$ ).

Таким образом, комплекс  $\underline{U}_{cf} = 20e^{j40^\circ}$  В. Это можно проверить аналитически, если составить уравнение по второму закону Кирхгофа в комплексной форме (рисунок 2.32).

$$\underline{U}_{R_2} + \underline{U}_{L_3} = \underline{U}_{cf} = 24,36e^{-j15^\circ} + 21,64e^{j110,8^\circ} = 20e^{j40^\circ} \text{ В.}$$

### 2.11. Цепи со взаимной индуктивностью

На практике встречаются электрические цепи, в которых катушки индуктивности расположены таким образом, что магнитный поток одной из них пронизывает другие и наводит в них э.д.с. взаимной индукции, т.е. между катушками существует взаимная индуктивность  $M$ . Такие цепи принято называть магнитосвязанными цепями или цепями со взаимной индуктивностью (индукцией). Электромагнитная энергия в магнитосвязанных цепях передается не только электрическим путем (по проводникам), но и через магнитную связь. Возникающие за счет наличия взаимной индуктивности э.д.с. должны быть учтены при расчетах.

Если магнитные потоки, созданные током в данной катушке и током от соседней, имеют одинаковое направление, то считают, что такие катушки соединены согласно. Если эти потоки противоположны по направлению, то катушки соединены встречно.

Чтобы сделать вывод о том, как соединены катушки (согласно или встречно), обычно одноименные зажимы их (начало или конец катушки) помечают на схеме точками (рисунок 2.36).

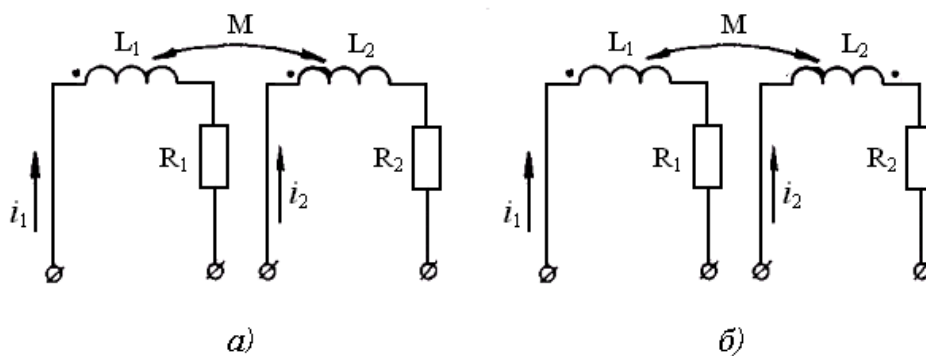


Рисунок 2.36 - Согласно и встречное включение индуктивно связанных катушек

Если токи в катушках ориентированы одинаково относительно одноименных зажимов (рисунок 2.36,а), то это согласно включение катушек. При таком включении магнитные потоки свой и от соседней катушки совпадают по направлению, и наводимые при этом в каждой катушке э.д.с. самоиндукции и взаимоиндукции также будут совпадать по направлению. Напряжения  $U_L$  и  $U_M$ , возникающие на катушках, равные наводимым э.д.с., будут также одинаково направлены.

При встречной работе катушек, когда токи направлены к разноименным зажимам катушек (рисунок 2.36,б), магнитные потоки свой и от соседней катушки направлены в них противоположно. Следовательно, э.д.с., вызванные этими потоками, и напряжения  $U_L$  и  $U_M$ , преодолевающие эти э.д.с., также должны быть направлены противоположно.

**1. Последовательное соединение индуктивно связанных катушек.** Пусть две индуктивные катушки соединены последовательно и подключены к источнику синусоидального напряжения. Как следует из рисунка 2.37,а, эти катушки включены согласно, так как ток направлен к одноименным зажимам катушек.

Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений:

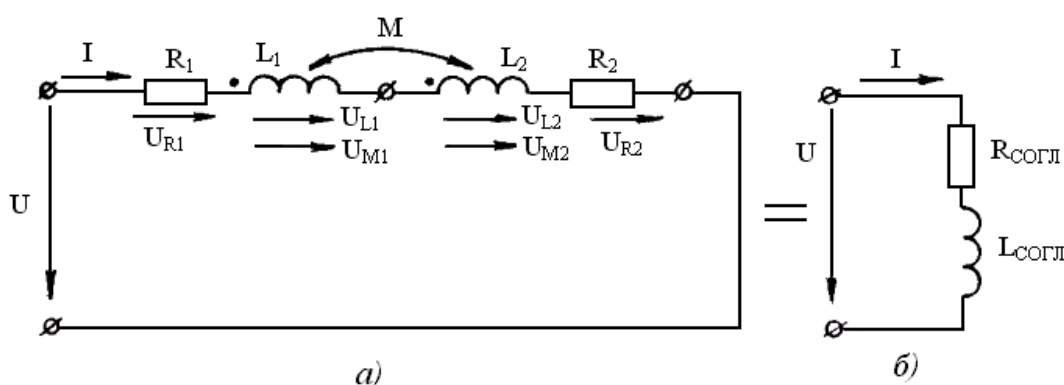


Рисунок 2.37 - Согласно последовательное включение катушек

$$u = u_{R_1} + u_{L_1} + u_{M_1} + u_{L_2} + u_{M_2} + u_{R_2}, \text{ ИЛИ}$$

$$u = i \cdot R_1 + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + i \cdot R_2.$$

В этих уравнениях:

$i \cdot R_1$  и  $i \cdot R_2$  - падения напряжений на активных сопротивлениях катушек;

$L_1 \frac{di}{dt}$  и  $L_2 \frac{di}{dt}$  - падения напряжений в катушках, вызванные э.д.с. самоиндукции;

$M \frac{di}{dt}$  - падение напряжения в катушке, вызванное э.д.с. взаимоиндукции, созданное током в другой катушке.

В комплексной форме это уравнение будет иметь вид:

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot R_1 + j \cdot \omega \cdot L_1 \cdot \underline{I} + j \omega \cdot M \cdot \underline{I} + j \omega \cdot L_2 \cdot \underline{I} + j \omega \cdot M \cdot \underline{I} + \underline{I} \cdot R_2$$

Приведя подобные, получим

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot (R_1 + R_2) + j \cdot \omega \cdot (L_1 + L_2 + 2M) \cdot \underline{I}.$$

Если последовательное согласное включение катушек заменить эквивалентной схемой (рисунок 2.37,б) с параметрами  $R_{согл}$  и  $L_{согл}$ , то для нее можно записать:

$$\underline{U} = R_{согл} \underline{I} + j \omega \cdot L_{согл} \underline{I}.$$

Сравнивая уравнения для исходной и эквивалентной схем, можно сделать вывод, что две индуктивно связанные катушки, соединенные последовательно,

при согласном включении эквивалентны катушке, у которой активное сопротивление  $R_{\text{созл}} = R_1 + R_2$ , а индуктивность

$$L_{\text{созл}} = L_1 + L_2 + 2M. \quad (2.77)$$

Таким образом, наличие взаимной индукции при согласном включении катушек увеличивает индуктивность цепи.

Векторная диаграмма при последовательном согласном включении индуктивно связанных катушек представлена на рисунке 2.38,а.

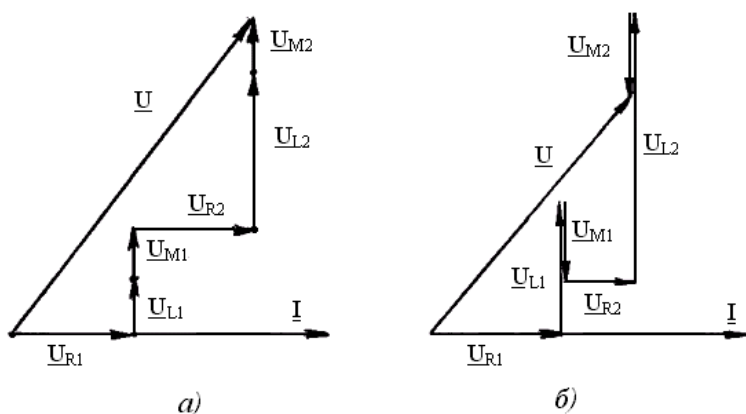


Рисунок 2.38 - Векторная диаграмма согласного и встречного последовательного включения катушек

При встречном включении катушек (рисунок 2.39,а) магнитные потоки свой и от соседней катушки будут направлены встречно. Очевидно, что и напряжения  $U_L$  и  $U_M$  также будут направлены противоположно. В этом случае уравнение по второму закону Кирхгофа в комплексной форме запишется:

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot R_1 + j\omega \cdot L_1 \cdot \underline{I} - j\omega \cdot M \cdot \underline{I} + j\omega \cdot L_2 \cdot \underline{I} - j\omega \cdot M \cdot \underline{I} + \underline{I} \cdot R_2,$$

или:

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot (R_1 + R_2) + j\omega \cdot (L_1 + L_2 - 2M) \cdot \underline{I}.$$

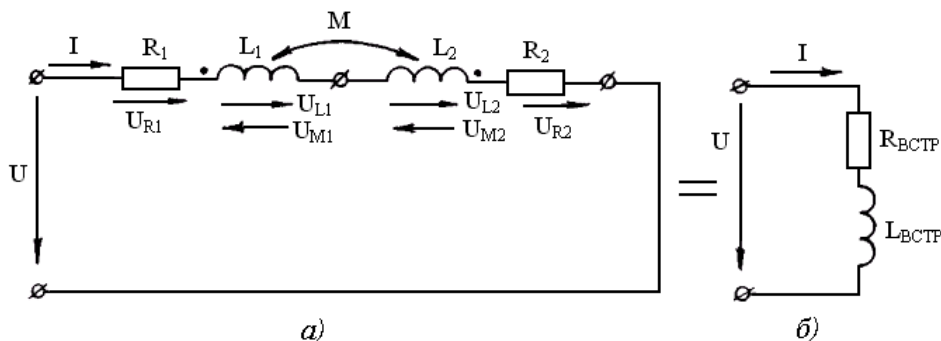


Рисунок 2.39 - Последовательное встречное включение катушек

Если теперь последовательное встречное включение катушек заменить эквивалентной катушкой (рисунок 2.39,б) с параметрами  $R_{встр}$  и  $L_{встр}$ , то для нее можно записать, что

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot R_{встр} + j\omega \cdot L_{встр} \cdot \underline{I}.$$

Из сравнения уравнений для исходной и эквивалентной схем следует, что  $R_{встр} = R_1 + R_2$ , а

$$L_{встр} = L_1 + L_2 - 2M, \quad (2.78)$$

т.е. активное сопротивление эквивалентной цепи равно также сумме активных сопротивлений индуктивно связанных катушек, а индуктивность цепи при встречном включении уменьшается на величину  $2M$ .

Векторная диаграмма при последовательном встречном включении магнитосвязанных катушек приведена на рисунке 2.38,б.

Если известна индуктивность согласного и встречного последовательного соединения магнитосвязанных катушек, то есть возможность определить взаимную индуктивность  $M$ . Если вычесть уравнение (2.78) из выражения (2.77), предварительно умножив их на  $\omega$ , то получим:

$$\omega \cdot L_{согл} - \omega \cdot L_{встр} = 4\omega \cdot M.$$

Отсюда взаимная индуктивность:

$$M = \frac{X_{согл} - X_{встр}}{4\omega}. \quad (2.79)$$

Реактивные сопротивления  $X_{согл}$  и  $X_{встр}$  можно определить опытным путем, подключив магнитосвязанные катушки к источнику синусоидального напряжения и измерив напряжение, ток и активную мощность при согласном и встречном включении (изменив в одном из опытов направление тока в одной из катушек на противоположное). Указанные сопротивления вычисляются (см. пример 2.4) по следующим формулам:

$$\begin{aligned} Z_{согл} &= \frac{U}{I_{согл}}, & R_{согл} &= \frac{P_{согл}}{I_{согл}^2}, & X_{согл} &= \sqrt{Z_{согл}^2 - R_{согл}^2}; \\ Z_{встр} &= \frac{U}{I_{встр}}, & R_{встр} &= \frac{P_{встр}}{I_{встр}^2}, & X_{встр} &= \sqrt{Z_{встр}^2 - R_{встр}^2}. \end{aligned}$$

**2. Параллельное соединение.** Пусть две магнитосвязанные катушки (рисунок 2.40,а) подключены параллельно к источнику синусоидального напряжения  $U$ , значение которого известно. Необходимо определить токи по известным параметрам катушек и взаимной индуктивности  $M$ .

Несмотря на то, что катушки находятся под одним напряжением, токи в них  $I_1$  и  $I_2$  нельзя определять отдельно из-за наличия взаимной индуктивности, которую необходимо учесть.

Уравнения по второму закону Кирхгофа в комплексной форме (рисунок 2.40,а) при согласном включении параллельных катушек:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 R_1 + j\omega \cdot L_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega \cdot M \cdot \underline{I}_2 &= \underline{U}, \\ \underline{I}_2 R_2 + j\omega \cdot L_2 \cdot \underline{I}_2 + j\omega \cdot M \cdot \underline{I}_1 &= \underline{U}, \end{aligned}$$

или:

$$\underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_M = \underline{U}, \quad (2.80)$$

$$\underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_M = \underline{U},$$

где  $\underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_M$  - комплекс падения напряжения в первой катушке, созданный током  $\underline{I}_2$ , а  $\underline{I}_1 \underline{Z}_M$  - падение напряжения во второй катушке, созданное током  $\underline{I}_1$ ;  $\underline{Z}_M = j\omega \cdot M$  - комплексное сопротивление взаимной индукции;  $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega \cdot L_1$ ;  $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega \cdot L_2$ .

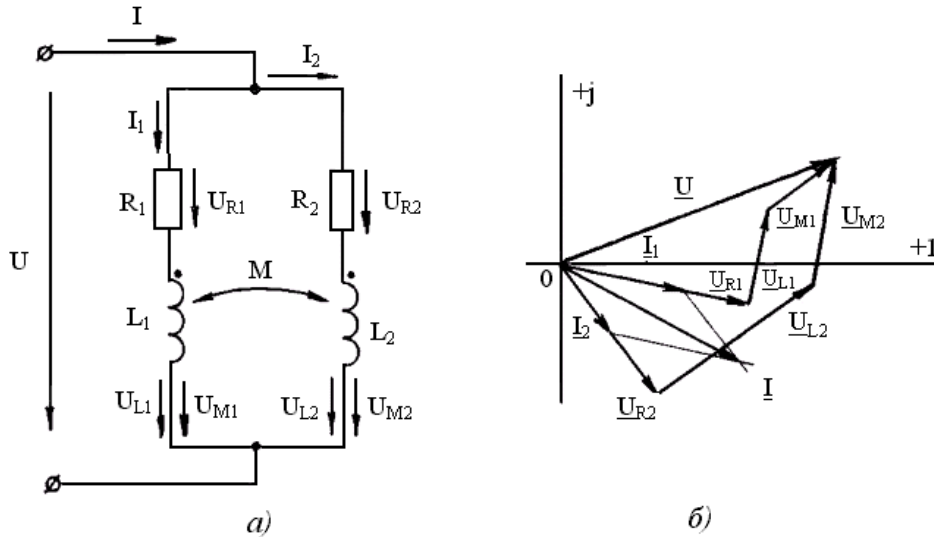


Рисунок 2.40 - Параллельное согласное соединение магнитосвязанных катушек и векторная диаграмма такой цепи

Совместное решение системы уравнений (2.80) дает выражения для токов в катушках:

$$\underline{I}_1 = \underline{U} \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}, \quad \underline{I}_2 = \underline{U} \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}.$$

Ток в неразветвленной части цепи (рисунок 2.40,а) определится из уравнения по первому закону Кирхгофа в комплексной форме:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{U} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}. \quad (2.81)$$

Если есть необходимость представить схему (рисунок 2.40,а) эквивалентной, то в соответствии с выражением (2.81) комплекс эквивалентного сопротивления двух параллельно соединенных магнитосвязанных катушек индуктивности при согласном включении можно определить по формуле

$$\underline{Z}_{\text{экв}} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M}. \quad (2.82)$$

При встречном включении катушек (рисунок 2.41) напряжения  $U_M$  и  $U_L$  в параллельных ветвях будут направлены противоположно, и поэтому уравнения для напряжения  $\underline{U}$  в этом случае будут отличаться от записанных для согласного включения (2.80) только знаком перед слагаемым с  $\underline{Z}_M$ . Поэтому

формулы для токов в ветвях (рисунок 2.41,а) можно записать сразу следующим образом:

$$\underline{I}_1 = \underline{U} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}, \quad \underline{I}_2 = \underline{U} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}, \quad \underline{I} = \underline{U} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}.$$

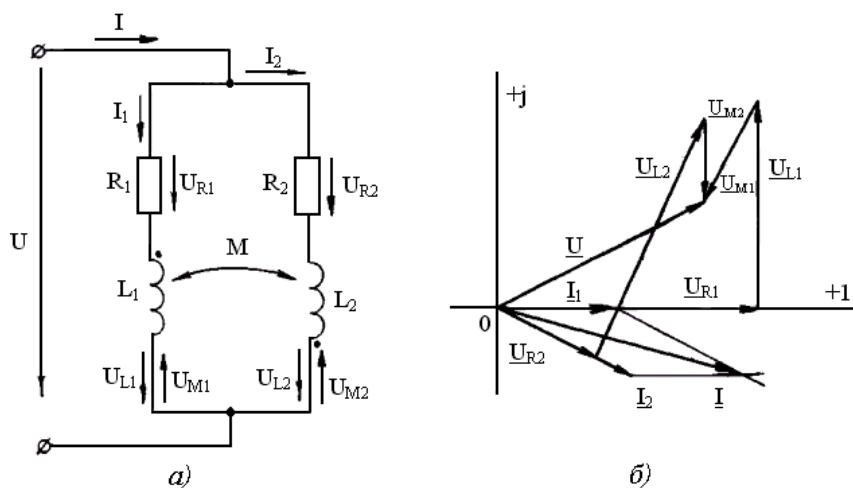


Рисунок 2.41 - Встречное включение катушек и их векторная диаграмма

Эквивалентное сопротивление параллельных катушек при наличии взаимной индуктивности, включенных встречно, определяется формулой:

$$\underline{Z}_{э.встр} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_M}. \quad (2.83)$$

На рисунках 2.40,б и 2.41,б изображены векторные диаграммы для обоих случаев соединения катушек.

**3. Расчет разветвленных цепей, содержащих индуктивно связанные катушки.** Расчет сложных цепей при наличии взаимной индуктивности обычно проводят с помощью уравнений Кирхгофа, учитывая при этом напряжения, вызываемые наводимыми в катушках э.д.с. взаимоиндукции.

Допустим, в схеме (рисунок 2.42,а) с известными параметрами, взаимной индуктивностью  $M$  и приложенным напряжением  $U$  требуется определить токи в ветвях.

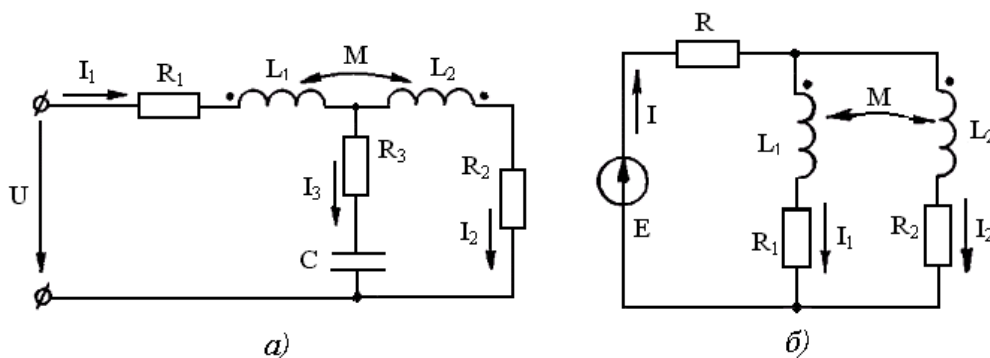


Рисунок 2.42 - Разветвленная электрическая цепь со взаимной индукцией

В соответствии с выбранными направлениями токов в ветвях и разметкой зажимов катушек (встречное включение) при составлении уравнений следует учесть, что напряжения взаимной индукции  $U_M$  будут направлены противоположно напряжениям  $U_L$ , которые обусловлены э.д.с. самоиндукции в катушках.

Если решать задачу методом непосредственного применения законов Кирхгофа, то необходимо составить три уравнения (по числу неизвестных токов). Одно уравнение - по первому закону Кирхгофа и два – по второму.

Для узла:

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0.$$

Для левого контура:

$$\underline{I}_1 R_1 + j\omega \cdot L_1 \cdot \underline{I}_1 - j\omega \cdot M \cdot \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \cdot R_3 + \underline{I}_3 \left(-j \frac{1}{\omega \cdot C}\right) = \underline{U}.$$

Для правого контура:

$$\underline{I}_2 R_2 + j\omega \cdot L_2 \cdot \underline{I}_2 - j\omega \cdot M \cdot \underline{I}_1 - \underline{I}_3 \cdot R_3 - \underline{I}_3 \left(-j \frac{1}{\omega \cdot C}\right) = 0.$$

Полученную систему можно переписать и следующим образом:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 &= 0, \\ \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 - \underline{Z}_M \cdot \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3 &= \underline{U}, \\ \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 - \underline{Z}_M \cdot \underline{I}_1 - \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Здесь  $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega \cdot L_1$ ,  $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega \cdot L_2$ ,  $\underline{Z}_3 = R_3 - j \frac{1}{\omega C}$ ,  $\underline{Z}_M = j\omega \cdot M$ .

Совместное решение системы уравнений (2.84) даст значения токов в ветвях  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$  и  $\underline{I}_3$ .

**Пример 2.13** В цепи с магнитосвязанными катушками (рисунок 2.42,б) требуется определить токи в ветвях, если  $R=3$  Ом,  $\underline{Z}_1=(1+j8)$  Ом,  $\underline{Z}_2=(1+j4)$  Ом,  $M=3,248 \cdot 10^{-3}$  Гн, а приложенная к цепи э.д.с.  $E=50$  В имеет частоту  $f=50$  Гц.

**Решение.** Система уравнений Кирхгофа для определения токов с учетом согласного включения катушек имеет вид:

$$\begin{aligned} \underline{I} - \underline{I}_1 - \underline{I}_2 &= 0, \\ \underline{U}_R + \underline{U}_{L_1} + \underline{U}_{M_1} + \underline{U}_{R_1} &= \underline{E}, \\ \underline{U}_R + \underline{U}_{L_2} + \underline{U}_{M_2} + \underline{U}_{R_2} &= \underline{E}, \quad \text{или:} \\ \underline{I} - \underline{I}_1 - \underline{I}_2 &= 0, \\ \underline{I} \cdot R + j\omega \cdot L_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega \cdot M \cdot \underline{I}_2 + \underline{I}_1 \cdot R_1 &= \underline{E}, \\ \underline{I} \cdot R + j\omega \cdot L_2 \cdot \underline{I}_2 + j\omega \cdot M \cdot \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \cdot R_2 &= \underline{E}. \end{aligned}$$

После подстановки числовых значений и приняв комплекс э.д.с.  $\underline{E}=50$  В, будем иметь:

$$\begin{aligned} \underline{I} - \underline{I}_1 - \underline{I}_2 &= 0, \\ 3\underline{I} + (1 + j8) \cdot \underline{I}_1 + j \cdot 1,02 \cdot \underline{I}_2 &= 50, \\ 3\underline{I} + j \cdot 1,02 \cdot \underline{I}_1 + (1 + j4) \cdot \underline{I}_2 &= 50. \end{aligned}$$

Систему уравнений решим через определители. Главный определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных:

$$\underline{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1+j8 & j1,02 \\ 3 & j1,02 & 1+j4 \end{vmatrix} = 48,25e^{j119,77^\circ}.$$

Определители для неизвестных токов, составленные на основе главного определителя системы путем замены столбца при неизвестном на свободные члены, запишутся:

$$\underline{\Delta}_I = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 50 & 1+j8 & j1,02 \\ 50 & j1,02 & 1+j4 \end{vmatrix} = 508e^{j78,65^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{\Delta}_{I_1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 50 & j1,02 \\ 3 & 50 & 1+j4 \end{vmatrix} = 157,16e^{j71,45^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{\Delta}_{I_2} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1+j8 & 50 \\ 3 & j1,02 & 50 \end{vmatrix} = 352,56e^{j81,85^\circ} \text{ A}.$$

Токи в ветвях:

$$\underline{I} = \frac{\underline{\Delta}_I}{\underline{\Delta}} = \frac{508e^{j78,65^\circ}}{48,25e^{j119,77^\circ}} = 10,53e^{-j41,12^\circ} \text{ A}.$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{\Delta}_{I_1}}{\underline{\Delta}} = \frac{157,16e^{j71,45^\circ}}{48,25e^{j119,77^\circ}} = 3,26e^{-j48,32^\circ} = (2,168 - j \cdot 2,435) \text{ A}.$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{\Delta}_{I_2}}{\underline{\Delta}} = \frac{352,56e^{j81,85^\circ}}{48,25e^{j119,77^\circ}} = 7,3e^{-j37,92^\circ} = (5,76 - j \cdot 4,486) \text{ A}.$$

Результат решения системы уравнений проверим составлением уравнения по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 2,168 - j \cdot 2,435 + 5,76 - j \cdot 4,486 = 10,53e^{-j41,12^\circ} \text{ A}.$$



### 3. ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

#### 3.1. Основные положения

На практике, кроме однофазных электрических цепей, нашли применение многофазные цепи, представляющие собой совокупность электрических цепей, в которых действуют несколько э.д.с. Эти э.д.с., как правило, имеют одинаковую амплитуду и частоту и сдвинуты относительно друг друга на определенный угол. Многофазные системы используются при промышленном выпрямлении переменного тока. Они широко применяются в электронике и автоматике.

Однако большее распространение в технике получила трехфазная система, особенно при передаче и распределении электрической энергии. Передача электрической энергии на большие расстояния в трехфазном исполнении требует меньшего расхода материала проводов, чем если бы ту же самую мощность передавать однофазной системой. Элементы трехфазной системы (генераторы, силовые трансформаторы, двигатели) исключительно просты по конструкции, надежны в эксплуатации, экономичны и отличаются приемлемой стоимостью. Очень важным является то обстоятельство, что в трехфазной системе есть возможность иметь у потребителя напряжения двух разных значений, например 220 и 380 В, что позволяет включать нагрузки на два разных номинальных напряжения.

Трехфазная система переменного тока была изобретена и разработана во всех деталях в 1891 году выдающимся русским инженером М.О. Доливо-Добровольским и получила распространение во всем мире.

Трехфазная цепь переменного тока – это совокупность трех однофазных цепей, содержащих э.д.с. одинаковой частоты и амплитуды и сдвинутых относительно друг друга на угол  $120^{\circ}$ . Однофазные цепи, входящие в состав трехфазной системы, называют фазами трехфазной цепи, и их обозначают буквами латинского алфавита: А, В, С. На рисунке 3.1,а показана несвязанная трехфазная цепь. Фазы ее электрически не связаны между собой. Из-за большого числа соединительных проводов, связывающих генератор и нагрузку ( $Z_A, Z_B, Z_C$ ), она не получила распространения. Сокращение числа проводов достигается в связанных трехфазных цепях, одна из разновидностей которых приведена на рисунке 3.1,б, где обмотки генератора и отдельные фазы нагрузки электрически связаны между собой. При этом нет необходимости применять отдельные однофазные генераторы, а используется трехфазный генератор, вырабатывающий трехфазную симметричную систему э.д.с.

Основная масса электрической энергии, используемая в технике и быту, вырабатывается на электрических станциях трехфазными синхронными генераторами. В простейшем виде такой генератор имеет на статоре три одинаковых обмотки, электрические оси которых сдвинуты на  $120^{\circ}$ . При вращении ротора, который в простейшем виде представляет собой постоянный магнит, в обмотках наводятся синусоидальные э.д.с., имеющие одинаковую

амплитуду и частоту и сдвинутые по фазе относительно друг друга на одну треть периода ( $120^\circ$ ).

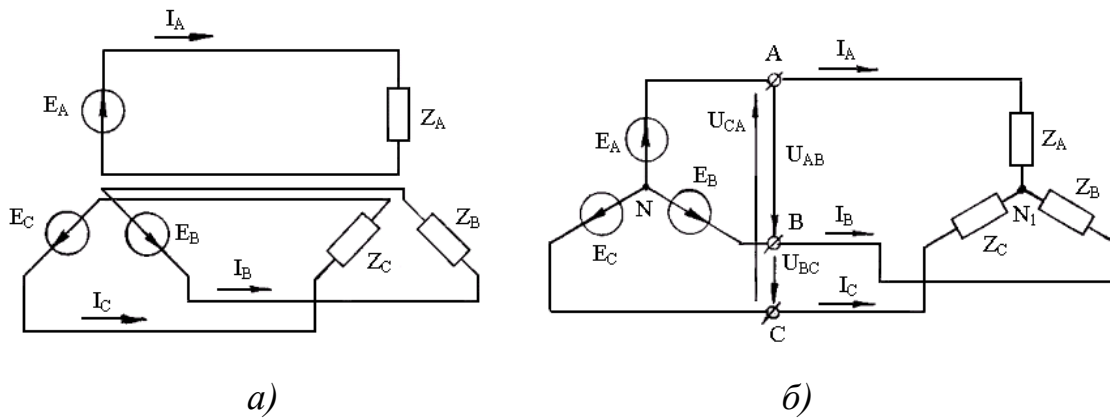


Рисунок 3.1 - Трехфазная цепь: а – несвязанная; б - связанная

От направления вращения ротора генератора зависит порядок возникновения максимума э.д.с. в фазах. Обычно используют прямой порядок чередования фаз ( $A \rightarrow B \rightarrow C$ ) когда э.д.с. в фазах достигают своих максимальных значений в таком порядке: сначала в фазе А, затем в фазе В и далее в фазе С.

Обратный порядок чередования фаз ( $A \rightarrow C \rightarrow B$ ) можно получить изменением направления вращения ротора генератора.

От последовательности чередования фаз зависит направление вращения трехфазных асинхронных двигателей.

При прямом порядке чередования фаз мгновенные значения э.д.с. трехфазного генератора аналитически выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} e_A &= E_m \sin \omega \cdot t; \\ e_B &= E_m \sin(\omega \cdot t - 120^\circ); \\ e_C &= E_m \sin(\omega \cdot t - 240^\circ) = E_m \sin(\omega \cdot t + 120^\circ). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Уравнениям (3.1) соответствуют графики э.д.с. и векторная диаграмма, изображенные на рисунке 3.2.

В комплексной форме э.д.с. фаз генератора запишутся:

$$\underline{E}_A = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} = E; \quad \underline{E}_B = E e^{-j120^\circ}; \quad \underline{E}_C = E e^{j120^\circ}. \quad (3.2)$$

Из-за того, что фазные э.д.с. генератора сдвинуты относительно друг друга на  $120^\circ$ , в ряде случаев электрические величины (токи и напряжения) в трехфазной цепи оказываются также сдвинутыми на угол  $120^\circ$ . Поэтому для краткости записи применяют комплексный фазовый оператор, обозначаемый буквой  $a$ . Умножение любого вектора на этот оператор означает поворот его на  $120^\circ$  против движения часовой стрелки без изменения модуля, т.е.

$$a = e^{j120^\circ} = \cos 120^\circ + j \sin 120^\circ = -\sin 30^\circ + j \cos 30^\circ = -0,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (3.3)$$

Умножение вектора на множитель  $a^2$  означает поворот его на  $240^\circ$  против часовой стрелки или на  $120^\circ$  по часовой:

$$a^2 = e^{j240^\circ} = e^{-j120^\circ} = \cos 120^\circ - j \sin 120^\circ = -\sin 30^\circ - j \cos 30^\circ = -0,5 - j \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (3.4)$$

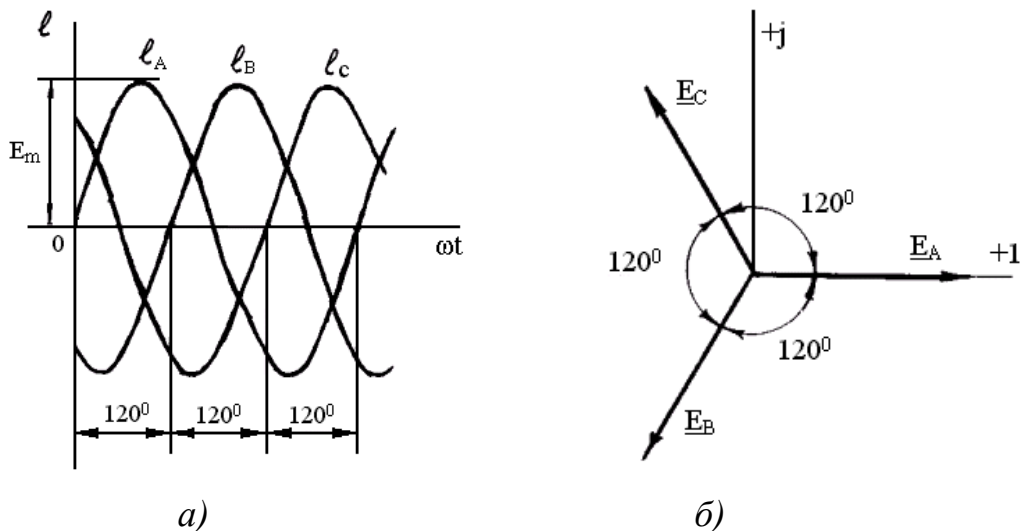


Рисунок 3.2 - Графики и векторная диаграмма симметричной трехфазной системы ЭДС

Нетрудно заметить, что

$$a^3 = e^{j360^\circ} = e^{j0^\circ} = 1.$$

С использованием фазового оператора э.д.с. фаз симметричного генератора могут быть записаны:

$$\underline{E}_A = E; \quad \underline{E}_B = \underline{E}_A \cdot a^2 = E \cdot a^2; \quad \underline{E}_C = \underline{E}_A \cdot a = E \cdot a. \quad (3.5)$$

Сумма комплексов э.д.с. трехфазной симметричной системы равна нулю:

$$\begin{aligned} \underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C &= E + a^2 E + a E = E(1 + a^2 + a) = \\ &= E \left( 1 - 0,5 - j \frac{\sqrt{3}}{2} - 0,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из рисунка 3.2,б также следует, что геометрическая сумма изображающих векторов э.д.с. симметричной трехфазной системы равна нулю.

Обмотки трехфазных генераторов обычно соединяют звездой (рисунок 3.1,б). При этом на выводах его возникают напряжения  $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$ ,  $U_{CA}$ , которые называют линейными (напряжение между двумя линейными проводами). Векторная диаграмма фазных э.д.с. и линейных напряжений симметричного трехфазного генератора приведена на рисунке 3.3.

Линейные напряжения генератора можно определить из уравнений по второму закону Кирхгофа из схемы рисунка 3.1,б.

$$\underline{U}_{AB} = \underline{E}_A - \underline{E}_B; \quad \underline{U}_{BC} = \underline{E}_B - \underline{E}_C; \quad \underline{U}_{CA} = \underline{E}_C - \underline{E}_A. \quad (3.7)$$

Определим комплекс линейного напряжения  $\underline{U}_{AB}$ :

$$\begin{aligned} \underline{U}_{AB} &= \underline{E}_A - \underline{E}_B = \underline{E}_A - a^2 \underline{E}_A = \underline{E}_A (1 - a^2) = \\ &= \underline{E}_A \left[ 1 - \left( -0,5 - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] = \underline{E}_A \left( 1,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3} \cdot \underline{E}_A e^{j30^\circ}, \end{aligned}$$

так как  $\sqrt{3} \cdot e^{j30^\circ} = \sqrt{3}(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) = \sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right) = 1,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2}.$

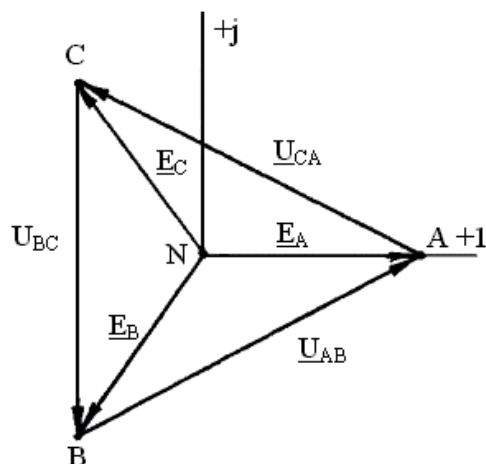


Рисунок 3.3 - Векторная диаграмма фазных э.д.с. и линейных напряжений генератора

Таким образом, *линейное напряжение симметричного трехфазного генератора в  $\sqrt{3}$  раз больше фазной ЭДС и опережает ее на угол  $30^\circ$* , т.е.  $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = \sqrt{3}E_A$ .

Нагрузка в фазах может соединяться звездой или треугольником. Если сопротивления нагрузки в фазах одинаковые, т.е.  $Z_A = Z_B = Z_C$  (рисунок 3.1,б), то такую нагрузку называют симметричной. Если сопротивления в фазах отличаются по характеру или по модулю, то такая нагрузка считается несимметричной.

### 3.2. Расчет трехфазной цепи при соединении нагрузки в звезду

Рассмотрим трехфазную цепь при соединении нагрузки в звезду (рисунок 3.4) с нейтральным проводом, объединяющим нейтральные точки генератора ( $N$ ) и нагрузки ( $N_1$ ). Такая четырехпроводная трехфазная система получается при замене трех обратных проводов несвязанной трехфазной цепи (рисунок 3.1,а) одним нейтральным проводом.

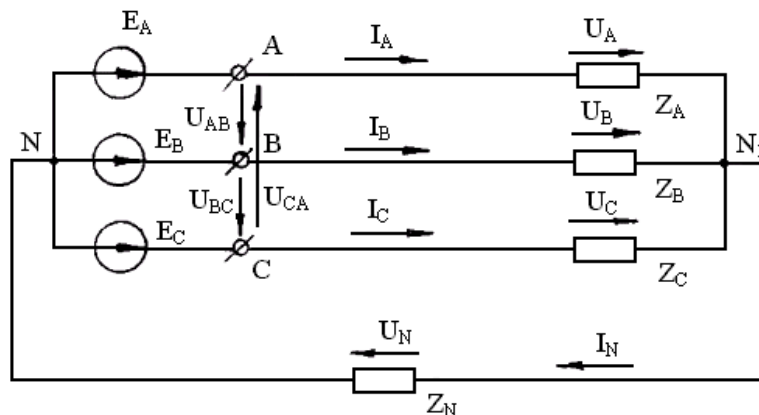


Рисунок 3.4 – Трехфазная четырехпроводная цепь

По линейным проводам, связывающим генератор с нагрузкой, протекают линейные токи  $I_A, I_B, I_C$ , положительное направление которых – от генератора к нагрузке. Из схемы (рисунок 3.4) следует, что линейный ток протекает по фазам нагрузки и генератора, т.е. является при таком соединении одновременно фазным током ( $I_L=I_\phi$ ). Напряжения  $U_A, U_B, U_C$  – фазные напряжения нагрузки (напряжение между нейтральной точкой  $N_1$  и линейным проводом).

Обычно при расчете считают заданными значение фазной э.д.с. или линейное напряжение генератора и параметры нагрузки и линии. Генератор считают симметричным, и поэтому значения э.д.с. в других фазах определяют по формулам (3.5).

Порядок расчета зависит от того, симметричная или несимметричная нагрузка.

**1. Симметричный режим.** В этом случае сопротивления по фазам нагрузки одинаковые, т.е.  $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = Ze^{j\varphi}$ , а э.д.с. генератора  $\underline{E}_A, \underline{E}_B = a^2 \underline{E}_A, \underline{E}_C = a \underline{E}_A$ .

Если пренебречь сопротивлением нейтрального провода ( $Z_N=0$ ), то разность потенциалов между нейтральными точками  $N$  и  $N_1$  (рисунок 3.4) равна нулю, и из схемы образуется три самостоятельных однофазных контура. К примеру, для фазы А будем иметь схему, изображенную на рисунке 3.5. Подобные схемы будут для фаз В и С.

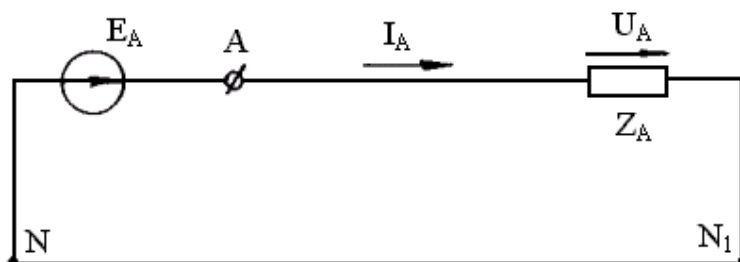


Рисунок 3.5 - Схема для расчета электрических величин фазы А

Комплекс тока в фазе А определится по закону Ома как

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_A}.$$

Токи в фазах В и С определяются:

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{a^2 \underline{E}_A}{\underline{Z}_A} = a^2 \underline{I}_A,$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{a \underline{E}_A}{\underline{Z}_A} = a \underline{I}_A.$$

Нетрудно увидеть, что при симметричной нагрузке, соединенной в звезду, достаточно провести расчет для одной фазы, а электрические

величины в оставшихся фазах будут такими же, только сдвинутыми по фазе на угол  $\pm 120^\circ$ .

Векторная диаграмма при симметричном режиме представлена на рисунке 3.6. Диаграмма построена для случая активно-индуктивной нагрузки в фазах, когда линейные токи отстают от соответствующих фазных э.д.с. генератора на угол  $\varphi$ , обусловленный нагрузкой в фазе.

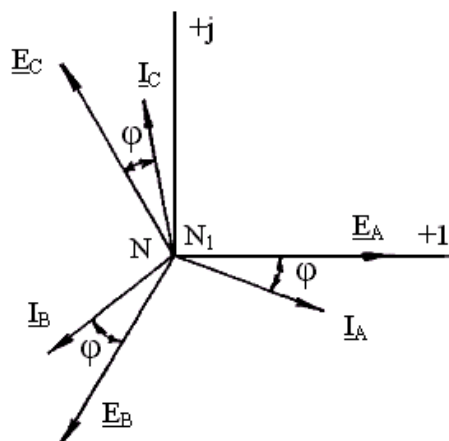


Рисунок 3.6 - Векторная диаграмма четырехпроводной трехфазной цепи в симметричном режиме

Положительное направление тока в нейтральном проводе в отличие от положительных направлений токов в линейных проводах (рисунок 3.4) выбирается от нагрузки к генератору. Поэтому комплекс тока в нейтральном проводе по первому закону Кирхгофа будет равен сумме линейных токов, т.е.

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C. \quad (3.8)$$

При симметричной нагрузке линейные токи имеют одинаковые значения и сдвинуты по фазе на угол  $120^\circ$ , т.е. образуют на комплексной плоскости симметричную трехфазную систему векторов (рисунок 3.6). Их сумма

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = \underline{I}_N = 0. \quad (3.9)$$

Равенство (3.9) означает, что при симметричной нагрузке ток в нейтральном проводе отсутствует, необходимость в нем отпадает и трехфазная система становится трехпроводной (рисунок 3.1,б). На практике симметричная нагрузка встречается достаточно часто: все двигатели трехфазного тока представляют собой симметричную нагрузку и обычно включаются в сеть по трехпроводной схеме, т.е. без нейтрального провода.

При симметричной нагрузке в трехпроводной цепи расчет проводится подобно тому, как это делается при наличии нейтрального провода. В этом случае фазы находятся в одинаковых условиях и потенциалы нейтральных точек генератора и нагрузки оказываются одинаковыми ( $\varphi_N = \varphi_{N_1}$ ). Эти точки можно мысленно объединить и вести также расчет на одну фазу.

**2. Несимметричный режим.** Несимметрия в трехфазной цепи может быть вызвана рядом причин: неодинаковым сопротивлением фаз (несимметричная нагрузка); несимметричными короткими замыканиями, обрывами фаз.

При несимметричной нагрузке ( $Z_A \neq Z_B \neq Z_C$ ) нарушается симметрия линейных токов, появляется ток в нейтральном проводе и между нейтральными точками генератора и нагрузки (рисунок 3.4) возникает так называемое напряжение смещения нейтрали  $\underline{U}_N = \underline{I}_N \cdot \underline{Z}_N$ , и расчет на одну фазу проводить нельзя.

Четырехпроводную трехфазную цепь при несимметричной нагрузке можно рассматривать как трехконтурную цепь с тремя э.д.с. (рисунок 3.4). Такая цепь может быть рассчитана известными методами расчета однофазных цепей: методом контурных токов, методом узловых напряжений и т.д. Поскольку в цепи только два узла, то целесообразнее применить метод двух узлов, определив напряжение между нейтральными точками  $N$  и  $N_I$  по формуле:

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{Y}_A \cdot \underline{E}_A + \underline{Y}_B \cdot \underline{E}_B + \underline{Y}_C \cdot \underline{E}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}, \quad (3.10)$$

где  $\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A}$ ,  $\underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B}$ ,  $\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C}$ ,  $\underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N}$  - проводимости соответствующих ветвей.

Комплексы фазных напряжений на нагрузке определяются из уравнений по второму закону Кирхгофа (рисунок 3.4):

$$\underline{U}_A = \underline{E}_A - \underline{U}_N; \quad \underline{U}_B = \underline{E}_B - \underline{U}_N; \quad \underline{U}_C = \underline{E}_C - \underline{U}_N, \quad (3.11)$$

а линейные токи и ток в нейтральном проводе:

$$\underline{I}_A = \underline{U}_A \cdot \underline{Y}_A; \quad \underline{I}_B = \underline{U}_B \cdot \underline{Y}_B; \quad \underline{I}_C = \underline{U}_C \cdot \underline{Y}_C; \quad \underline{I}_N = \underline{U}_N \cdot \underline{Y}_N. \quad (3.12)$$

В случае трехпроводной цепи ( $Z_N = \infty$ ) при несимметричной нагрузке расчет проводится аналогично, только напряжение смещения нейтрали определяется по формуле:

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{Y}_A \cdot \underline{E}_A + \underline{Y}_B \cdot \underline{E}_B + \underline{Y}_C \cdot \underline{E}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}, \quad (3.13)$$

так как  $\underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N} = 0$ .

Из выражения (3.10) следует, что при наличии нейтрального провода, сопротивление которого мало ( $Y_N \rightarrow \infty$ ), напряжение  $U_N$  близко к нулю и фазные напряжения на нагрузке ( $U_A, U_B, U_C$ ) в соответствии с уравнениями (3.11) мало отличаются от соответствующих фазных э.д.с., которые симметричны и практически не зависят от режима работы нагрузки. Неравномерность нагрузки в этом случае сказывается на величине тока в нейтральном проводе.

При обрыве нейтрального провода ( $Y_N = 0$ ) и несимметричной нагрузке фаз напряжение  $U_N$  оказывается весьма значительным и может привести к резкой несимметрии фазных напряжений.

Если известно, что в процессе работы возможна неравномерная нагрузка по фазам, то такой трехфазный приемник соединяют звездой с нейтральным проводом. При этом необходимо следить за тем, чтобы не происходило обрыва нейтрального провода, так как это может вызвать недопустимые изменения фазных напряжений: повышение на одних фазах приемника (вплоть до линейного напряжения) и понижение на других. По этой же причине не ставят в нейтральный провод коммутирующие аппараты и предохранители.

**Пример 3.1.** К симметричному трехфазному генератору с линейным напряжением  $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 380$  В (рисунок 3.4) подключена симметричная нагрузка  $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = (4 + j3)$  Ом. Определить токи в фазах и нейтральном проводе и построить топографическую диаграмму напряжений, совмещенную с векторной диаграммой токов. Сопротивлением линейных и нейтрального проводов пренебречь.

**Решение.** Так как нагрузка симметричная, то достаточно провести расчет на одну фазу.

Действующее значение фазной э.д.с. симметричного генератора:

$$E_A = E_B = E_C = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В.}$$

Если э.д.с. фазы А направить по вещественной оси комплексной плоскости, то комплекс тока в фазе А определится:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{220}{4 + j3} = \frac{220}{5e^{j36,9^\circ}} = 44e^{-j36,9^\circ} \text{ А.}$$

Токи в фазах В и С можно записать через фазовый оператор:

$$\underline{I}_B = a^2 \cdot \underline{I}_A = 44e^{-j36,9^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} = 44e^{-j156,9^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_C = a \cdot \underline{I}_A = 44e^{-j36,9^\circ} \cdot e^{j120^\circ} = 44e^{j83,1^\circ} \text{ А.}$$

Действующие значения токов в фазах нагрузки:

$$I_A = I_B = I_C = 44 \text{ А.}$$

Так как токи  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$  представляют симметричную трехфазную систему, то ток в нейтральном проводе, согласно формуле (3.8):

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0.$$

На рисунке 3.7 построена совмещенная топографическая диаграмма напряжений и векторная диаграмма токов. Построение диаграммы напряжений начинают с изображения в выбранном масштабе векторов фазных э.д.с. генератора  $\underline{E}_A$ ,  $\underline{E}_B$  и  $\underline{E}_C$ , направив при этом э.д.с. фазы А по вещественной оси комплексной плоскости. Соединив точки А, В и С, получим в выбранном масштабе равносторонний треугольник векторов линейных напряжений генератора  $\underline{U}_{AB}$ ,  $\underline{U}_{BC}$ ,  $\underline{U}_{CA}$ .



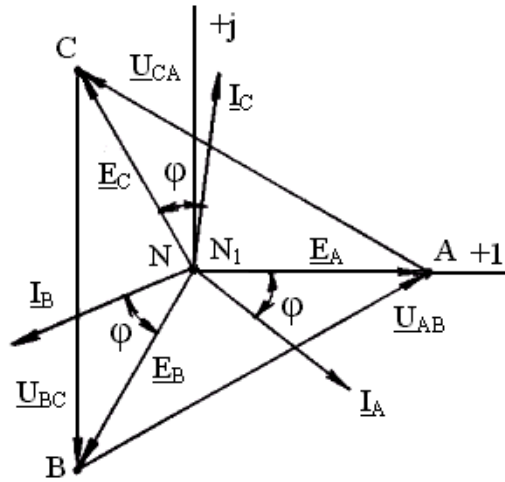


Рисунок 3.7 - Векторная диаграмма четырехпроводной трехфазной цепи при симметричной нагрузке

Затем откладываются векторы токов в фазах  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$ , отстающие от соответствующих фазных э.д.с. генератора на угол  $\varphi = 36,9^\circ$ , так как нагрузка в фазах активно-индуктивная.

Точки  $N$  и  $N_1$  совпадают и находятся в начале координат комплексной плоскости.

**Пример 3.2.** К трехфазной линии с линейным напряжением  $U_{л} = 220$  В подключена несимметричная нагрузка, соединенная звездой с нейтральным проводом (рисунок 3.8,а). Комплексы сопротивлений фаз нагрузки

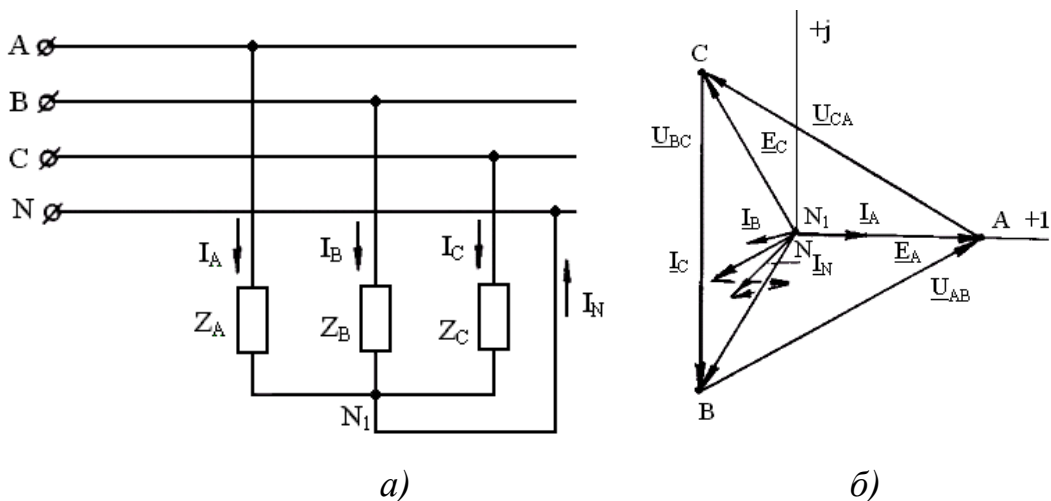


Рисунок 3.8 - Четырехпроводная трехфазная цепь в несимметричном режиме и ее векторная диаграмма

соответственно равны:  $Z_A = 20$  Ом,  $Z_B = (20 + j20)$  Ом,  $Z_C = -j15$  Ом. Определить токи в фазах нагрузки и в нейтральном проводе. Построить топографическую

диаграмму напряжений, совмещенную с векторной диаграммой токов. Определить токи в фазах и нейтральном проводе при обрыве фазы  $A$ .

**Решение.** Комплексы э.д.с. фаз питающей линии (генератора):

$$\underline{E}_A = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} e^{j0^\circ} = \frac{220}{\sqrt{3}} e^{j0^\circ} = 127 \text{ В}; \quad \underline{E}_B = a^2 \underline{E}_A = 127 e^{-j120^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{E}_C = a \underline{E}_A = 127 e^{j120^\circ} \text{ В}.$$

Токи в линейных проводах и фазах нагрузки одинаковы и рассчитываются по закону Ома:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{127}{20} = 6,35 \text{ А},$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{127 e^{-j120^\circ}}{20 + j20} = \frac{127 e^{-j120^\circ}}{28,28 e^{j45^\circ}} = 4,5 e^{-j165^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{127 e^{j120^\circ}}{15 e^{-j90^\circ}} = 8,47 e^{j210^\circ} \text{ А}.$$

Ток в нейтральном проводе

$$\begin{aligned} \underline{I}_N &= \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 6,35 + 4,5 e^{-j165^\circ} + 8,47 e^{j210^\circ} = \\ &= 6,35 - 4,34 - j1,16 - 7,335 - j4,23 = \\ &= -5,325 - j5,39 = 7,58 e^{-j134,66^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$

Таким образом, действующие значения токов в фазах  $I_A = 6,35 \text{ А}$ ,  $I_B = 4,5 \text{ А}$ ,  $I_C = 8,47 \text{ А}$ , а в нейтральном проводе  $I_N = 7,58 \text{ А}$ .

В выбранном масштабе строим топографическую векторную диаграмму напряжений (рисунок 3.8,б), аналогичную построенной на рисунке 3.7. При построении векторной диаграммы токов необходимо учесть, что токи в фазах сдвинуты относительно фазных э.д.с. на разные углы сдвига фаз:  $\varphi_a = 0^\circ$  - нагрузка чисто активная,  $\varphi_b = 45^\circ$  - нагрузка активно-индуктивная,  $\varphi_c = 90^\circ$  - нагрузка емкостная. Векторы токов в фазах можно построить и как соответствующие комплексы на комплексной плоскости.

Вектор тока в нейтральном проводе также можно построить двумя способами: или как сумму векторов  $\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C$ , или непосредственно отложить вектор  $\underline{I}_N$  в соответствии с результатами расчета (действующее значение тока в нейтральном проводе равно  $7,58 \text{ А}$ , а его начальная фаза  $\psi_N = -134,66^\circ$ ).

В случае обрыва фазы  $A$  ток в ней станет равным нулю ( $\underline{I}_A = 0$ ), а токи в фазах  $B$  и  $C$  не изменятся, так как в схеме с нейтральным проводом режимы фаз не зависят друг от друга, т.е.  $\underline{I}_B = 4,5 e^{-j165^\circ} \text{ А}$ ,  $\underline{I}_C = 8,47 e^{j210^\circ} \text{ А}$ . Комплекс тока в нейтральном проводе определится из первого закона Кирхгофа как

$$\underline{I}_N = \underline{I}_B + \underline{I}_C = -4,34 - j1,16 - 7,335 - j4,23 = -11,675 - j5,39 = 12,86 e^{j204,8^\circ} \text{ А}.$$

**Пример 3.3.** Симметричный трехфазный генератор (рисунок 3.9), фазная э.д.с. которого  $E_\phi = 3300 \text{ В}$ , питает через линию передачи приемник, фазы

которого соединены звездой и нагружены равномерно  $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = (35 + j20) \text{ Ом}$ . Сопротивление каждого провода линии  $\underline{Z}_{np} = (5 + j10) \text{ Ом}$ . Определить токи, построить топографическую векторную диаграмму напряжений и векторную диаграмму токов.

**Решение.** Так как в заданной схеме наблюдается симметричный режим, то расчет можно выполнять на одну фазу.

Комплекс тока в фазе А:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_\phi}{\underline{Z}_{np} + \underline{Z}_A} = \frac{3300}{5 + j10 + 35 + j20} = \frac{3300}{40 + j30} = \frac{3300}{50e^{j36,87^\circ}} = 66e^{-j36,87^\circ} \text{ А.}$$

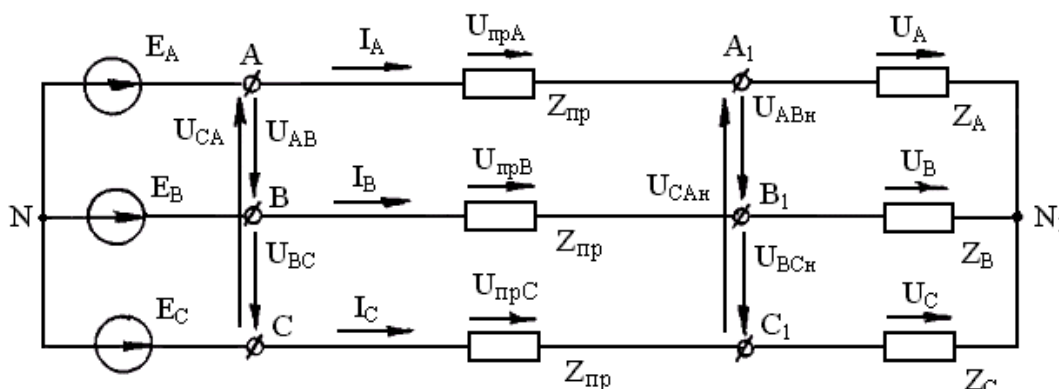


Рисунок 3.9 - Иллюстрация к примеру 3.3

Комплексы токов в фазах В и С:

$$\underline{I}_B = a^2 \underline{I}_A = 66e^{-j156,87^\circ} \text{ А,} \quad \underline{I}_C = a \underline{I}_A = 66e^{j83,13^\circ} \text{ А.}$$

Фазные напряжения на нагрузке:

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= \underline{I}_A \cdot \underline{Z}_A = 66e^{-j36,87^\circ} (35 + j20) = \\ &= 66e^{-j36,87^\circ} \cdot 40,31e^{j29,75^\circ} = 2660e^{-j7,12^\circ} \text{ В,} \end{aligned}$$

$$\underline{U}_B = a^2 \underline{U}_A = 2660e^{-j127,12^\circ} \text{ В,} \quad \underline{U}_C = a \underline{U}_A = 2660e^{j112,88^\circ} \text{ В.}$$

Комплексы падений напряжений на сопротивлениях линейных проводов в фазе А определим по закону Ома, а для фаз В и С запишем через фазовый оператор.

$$\begin{aligned} \underline{U}_{npA} &= \underline{I}_A \cdot \underline{Z}_{np} = 66e^{-j36,87^\circ} \cdot (5 + j10) = \\ &= 66e^{-j36,87^\circ} \cdot 11,2e^{j63,44^\circ} = 739e^{j26,57^\circ} \text{ В,} \end{aligned}$$

$$\underline{U}_{npB} = a^2 \underline{U}_{npA} = 739e^{-j93,43^\circ} \text{ В,} \quad \underline{U}_{npC} = a \underline{U}_{npA} = 739e^{j146,57^\circ} \text{ В.}$$

Построение топографической векторной диаграммы напряжений, представленной на рисунке 3.10, выполняем в следующем порядке. Сначала изображаем векторы фазных э.д.с. генератора подобно тому, как это делалось в примерах 3.1 и 3.2. Векторы линейных напряжений генератора  $\underline{U}_{AB}$ ,  $\underline{U}_{BC}$ ,  $\underline{U}_{CA}$  на диаграмме не показаны. Затем строим векторы токов  $\underline{I}_A$ ,  $\underline{I}_B$ ,  $\underline{I}_C$ , отстающие от соответствующих э.д.с. фаз генератора на угол  $36,87^\circ$ , обусловленный полной

нагрузкой в фазе ( $\underline{Z}_{np} + \underline{Z}_A$ ). Векторы фазных напряжений на нагрузке  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$  опережают соответствующие токи на угол  $29,75^\circ$ , так как  $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = 40,31e^{29,75^\circ} \text{ Ом}$ . Из концов векторов фазных напряжений (точки  $A_1, B_1, C_1$ ) откладываем векторы падений напряжений на проводах линии  $\underline{U}_{npA}, \underline{U}_{npB}, \underline{U}_{npC}$  в соответствии с данными расчета. Соединив точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$ , получим векторы линейных напряжений на нагрузке  $\underline{U}_{AB_H}, \underline{U}_{BC_H}, \underline{U}_{CA_H}$ .

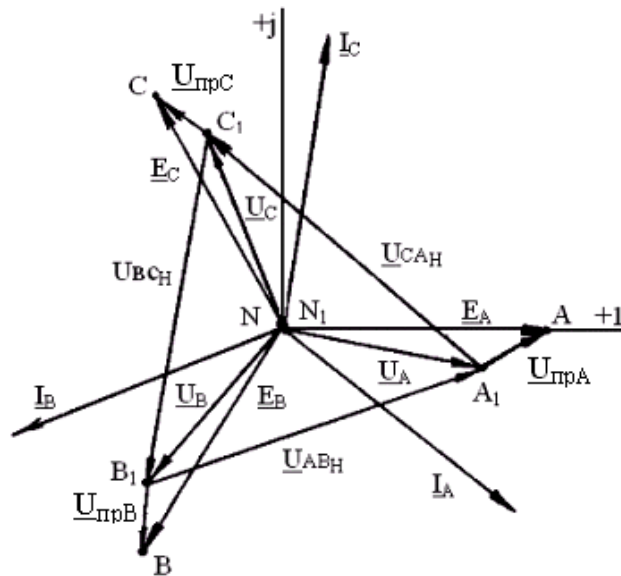


Рисунок 3.10 - Векторная диаграмма в симметричном режиме

**Пример 3.4.** К трехпроводной трехфазной сети с линейным напряжением  $U_{лл}=220 \text{ В}$  подключена нагрузка, фазы которой соединены звездой (рисунок 3.11). Сопротивления нагрузки:  $R_A = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_B = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_B = 8,66 \text{ Ом}$ ,

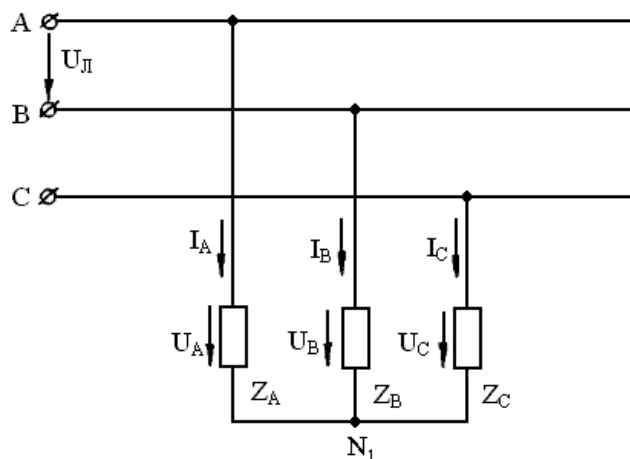


Рисунок 3.11 - Трехпроводная трехфазная цепь

$X_C = -10$  Ом. Определить токи в нагрузке и построить топографическую диаграмму напряжений, совмещенную с векторной диаграммой токов.

**Решение.** Считаем, что фазные напряжения источника представляют собой симметричную систему

$$\underline{E}_A = E_\phi e^{j0^\circ} = \frac{U_\Pi}{\sqrt{3}} e^{j0^\circ} = \frac{220}{\sqrt{3}} e^{j0^\circ} = 127 e^{j0^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{E}_B = a^2 \underline{E}_A = 127 e^{-j120^\circ} \text{ В}; \quad \underline{E}_C = a \underline{E}_A = 127 e^{j120^\circ} \text{ В}.$$

Комплексные сопротивления фаз нагрузки:

$$\underline{Z}_A = Z_A e^{j\varphi_A} = R_A = 10 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_B = Z_B e^{j\varphi_B} = R_B + jX_B = 5 + j8,66 = 10 e^{j60^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_C = Z_C e^{j\varphi_C} = -j10 = 10 e^{-j90^\circ} \text{ Ом}.$$

Комплексные проводимости фаз нагрузки:

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ См}; \quad \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B} = \frac{1}{10 e^{j60^\circ}} = 0,1 e^{-j60^\circ} \text{ См};$$

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{10 e^{-j90^\circ}} = 0,1 e^{j90^\circ} \text{ См}.$$

Так как нагрузка несимметричная и отсутствует нейтральный провод, то расчет ведем через напряжение смещения нейтрали, которое в соответствии с формулой (3.13) определится:

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \frac{127 \cdot 0,1 + 127 e^{-j120^\circ} \cdot 0,1 e^{-j60^\circ} + 127 e^{j120^\circ} \cdot 0,1 e^{j90^\circ}}{0,1 + 0,1 e^{-j60^\circ} + 0,1 e^{j90^\circ}} =$$

$$= -76,28 - j35,41 = 84,1 e^{j204,9^\circ} = U_N e^{j\psi_N}.$$

Из-за смещения нейтрали фазные напряжения нагрузки не будут равны фазным э.д.с. источника (сети) и определяются по формуле (3.11):

$$\underline{U}_A = \underline{E}_A - \underline{U}_N = 127 - (-76,28 - j35,41) = 203,28 + j35,41 = 206,4 e^{j9,9^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_B = \underline{E}_B - \underline{U}_N = -63,5 - j110 - (-76,28 - j35,41) = 12,78 - j74,59 = 75,68 e^{-j80,28^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_C = \underline{E}_C - \underline{U}_N = -63,5 + j110 - (-76,28 - j35,41) = 12,78 + j145,41 = 146 e^{j85^\circ} \text{ В}.$$

Из-за смещения нейтральной точки нагрузки симметрия фазных напряжений нарушается:  $U_A = 206,4 \text{ В}$ ,  $U_B = 75,68 \text{ В}$ ,  $U_C = 146 \text{ В}$  вместо  $U_\phi = 127 \text{ В}$ .

Комплексы токов в фазах нагрузки:

$$\underline{I}_A = \underline{U}_A \cdot \underline{Y}_A = 206,4 e^{j9,9^\circ} \cdot 0,1 = 20,64 e^{j9,9^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_B = \underline{U}_B \cdot \underline{Y}_B = 75,68 e^{-j80,28^\circ} \cdot 0,1 e^{-j60^\circ} = 7,568 e^{-j140,28^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_C = \underline{U}_C \cdot \underline{Y}_C = 146 e^{j85^\circ} \cdot 0,1 e^{j90^\circ} = 14,6 e^{j175^\circ} \text{ А}.$$

Результат расчета токов можно проверить первым законом Кирхгофа. Сумма фазных (они же линейные) токов в трехпроводной трехфазной системе (рисунок 3.11) должна быть равна нулю, т.е.

$$\begin{aligned} \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C &= 20,64 e^{j9,9^\circ} + 7,568 e^{-j140,28^\circ} + 14,6 e^{j175^\circ} = \\ &= 20,33 + j3,54 - 5,8 - j4,82 - 14,53 + j1,28 = 0. \end{aligned}$$

Строим в масштабе топографическую векторную диаграмму фазных э.д.с. и линейных напряжений генератора (сети), аналогично изложенному выше в примерах, и вектор напряжения смещения нейтрали  $\underline{U}_N = 84,1e^{j204,9^\circ}$  В (рисунок 3.12). Векторы, соединяющие точку  $N_1$  и точки А, В, С, соответственно будут векторами фазных напряжений нагрузки  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$ .

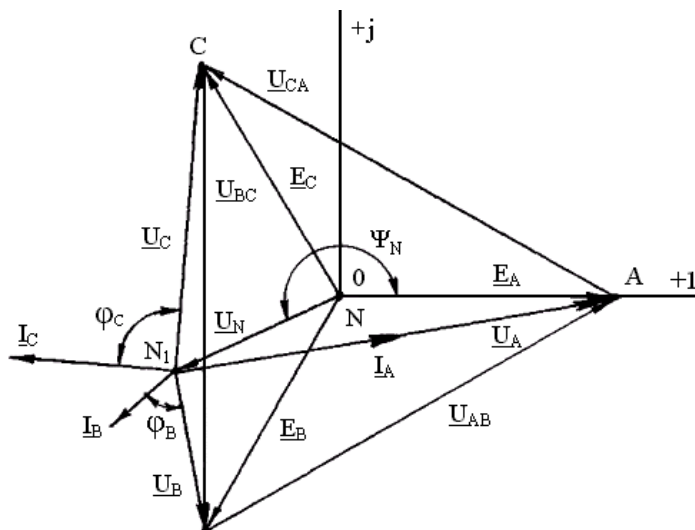


Рисунок 3.12 – Топографическая векторная диаграмма трехпроводной цепи в несимметричном режиме

Положение точки  $N_1$  на диаграмме можно определить и по-другому. После построения диаграммы э.д.с. и линейных напряжений генератора раствором циркуля, равным в масштабе напряжениям  $U_A, U_B, U_C$ , сделать засечки соответственно из точек А, В и С. Точка пересечения этих засечек будет являться положением точки  $N_1$ . Вектор, соединяющий точки N и  $N_1$ , является напряжением смещения нейтрали. Из точки  $N_1$  строим векторы токов  $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$  с учетом сдвига фаз относительно соответствующих фазных напряжений  $\varphi_A = 0^\circ, \varphi_B = 60^\circ, \varphi_C = 90^\circ$ .

**Пример 3.5** Пусть в трехфазной симметричной системе (пример 3.1) отсутствует нейтральный провод. Определить токи в фазах нагрузки и построить топографическую векторную диаграмму напряжений, совмещенную с диаграммой токов для следующих режимов: а) обрыв линейного провода в фазе А; б) короткое замыкание фазы А.

**Решение.** При обрыве фазы А симметрия системы нарушается (рисунок 3.13,а) и расчет необходимо проводить через напряжение смещения нейтрали.

Проводимость оборванной фазы  $\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A} = 0$ , проводимости неповрежденных фаз не изменятся  $\underline{Y}_B = \underline{Y}_C = \underline{Y}_\phi$ , так как  $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}_\phi$ .

Комплекс напряжения смещения нейтрали в соответствии с формулой (3.13) определится:

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{E}_A \cdot 0 + \underline{E}_B \underline{Y}_B + \underline{E}_C \underline{Y}_C}{0 + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \frac{\underline{Y}_\phi (\underline{E}_B + \underline{E}_C)}{2 \underline{Y}_\phi} = -\frac{\underline{E}_A}{2} = -\frac{220e^{j0^\circ}}{2} = -110B,$$

так как в соответствии с формулой (3.6)  $\underline{E}_B + \underline{E}_C = -\underline{E}_A$ .

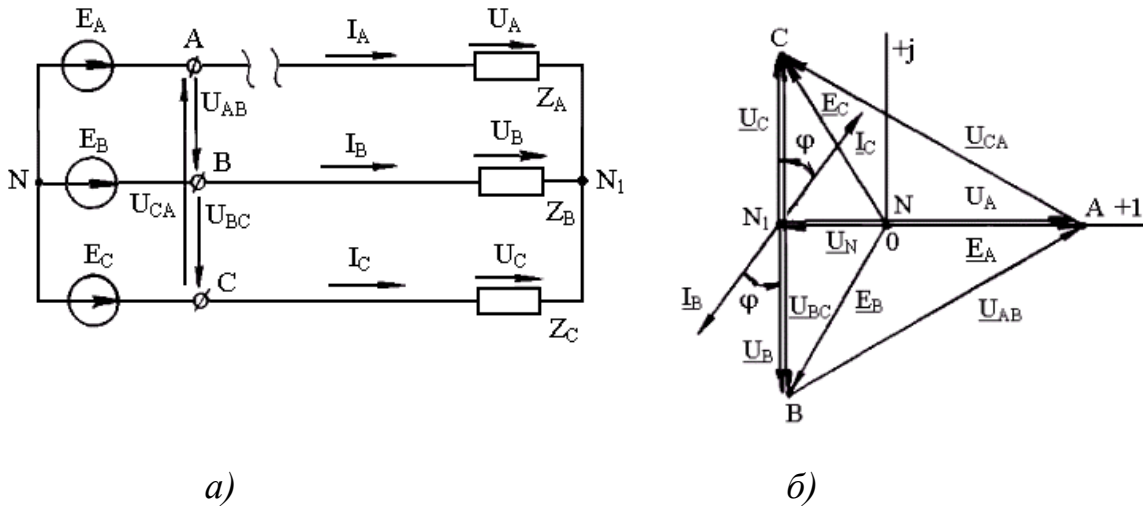


Рисунок 3.13 - Трехфазная цепь при обрыве фазы А и ее топографическая векторная диаграмма

По формулам (3.11) определим комплексы напряжений на фазах нагрузки:

$$\underline{U}_A = \underline{E}_A - \underline{U}_N = \underline{E}_A - \left(-\frac{\underline{E}_A}{2}\right) = \frac{3}{2}\underline{E}_A = \frac{3}{2}220e^{j0^\circ} = 330 \text{ В};$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_B &= \underline{E}_B - \underline{U}_N = \underline{E}_B - \frac{\underline{E}_B + \underline{E}_C}{2} = \frac{\underline{E}_B - \underline{E}_C}{2} = \\ &= \frac{U_{BC}}{2} = \frac{380e^{-j90^\circ}}{2} = 190e^{-j90^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что согласно формуле (3.7)  $\underline{U}_{BC} = \underline{E}_B - \underline{E}_C$ , при этом линейное напряжение  $U_{BC}$  опережает э.д.с.  $E_B$  на угол  $30^\circ$ , т.е.  $\underline{U}_{BC} = 380e^{-j90^\circ}$  В.

$$\begin{aligned} \underline{U}_C &= \underline{E}_C - \underline{U}_N = \underline{E}_C - \frac{\underline{E}_B + \underline{E}_C}{2} = \frac{\underline{E}_C - \underline{E}_B}{2} = \frac{U_{CB}}{2} = \\ &= -\frac{U_{BC}}{2} = \frac{380e^{j90^\circ}}{2} = 190e^{j90^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

Комплексы токов в фазах нагрузки:

$$\underline{I}_A = 0; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_\phi} = \frac{190e^{-j90^\circ}}{5e^{j36,9^\circ}} = 38e^{-j126,9^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_\phi} = \frac{190e^{j90^\circ}}{5e^{j36,9^\circ}} = 38e^{j53,1^\circ} \text{ А}.$$

Строим в масштабе топографическую векторную диаграмму фазных э.д.с. и линейных напряжений генератора (рисунок 3.13,б). Нейтральная точка

нагрузки  $N_I$  не будет совпадать с нейтральной точкой генератора  $N$  и при значении напряжения смещения  $\underline{U}_N = -110$  В будет находиться в середине вектора линейного напряжения  $\underline{U}_{BC}$ . Действительно, в рассматриваемом режиме получается, что два одинаковых сопротивления  $\underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}_\phi$  соединены последовательно и подключены к линейному напряжению  $U_{BC}$  (рисунок 3.13,а). Очевидно, что напряжения на неповрежденных фазах будут одинаковы и равны половине линейного, т.е.  $U_B = U_C = \frac{U_{BC}}{2} = 190$  В, а нейтральная точка  $N_I$  будет располагаться в середине вектора напряжения  $U_{BC}$ . Векторы, соединяющие точку  $N_I$  с точками  $A, B$  и  $C$ , соответственно будут векторами фазных напряжений нагрузки  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$ . Векторы токов  $\underline{I}_B$  и  $\underline{I}_C$  строим из точки  $N_I$  отстающими от соответствующих фазных напряжений на угол  $\varphi = 36,9^\circ$ .

При коротком замыкании фазы  $A$  (рисунок 3.14,а) сопротивление  $\underline{Z}_A = 0$ , напряжение на ней  $\underline{U}_A = 0$  и потенциал точки  $N_I$  становится равным потенциалу точки  $A$ . Нейтральная точка нагрузки  $N_I$  на топографической векторной диаграмме напряжений (рисунок 3.14,б) смещается в точку  $A$ .

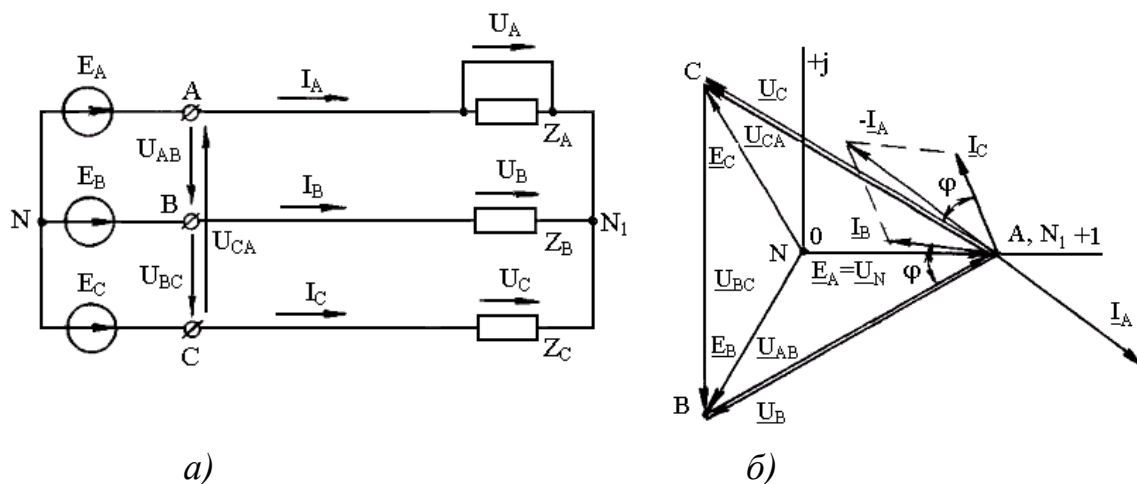


Рисунок 3.14 - Трехфазная цепь при коротком замыкании в фазе А и ее топографическая векторная диаграмма

Очевидно, что напряжение смещения нейтрали  $\underline{U}_N = \underline{E}_A = 220e^{j0^\circ}$ , а напряжения на неповрежденных фазах возрастут до линейного и будут иметь значения:

$$\underline{U}_B = 380e^{j210^\circ} \text{ В}, \quad \underline{U}_C = 380e^{j150^\circ}.$$

Токи в фазах  $B$  и  $C$ :

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{380e^{j210^\circ}}{5e^{j36,9^\circ}} = 76e^{j173,1^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{380e^{j150^\circ}}{5e^{j36,9^\circ}} = 76e^{j113,1^\circ} \text{ А}.$$

Ток в поврежденной фазе находится по первому закону Кирхгофа. Для узла

$$N_I : \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0,$$



откуда

$$\underline{I}_A = -(\underline{I}_B + \underline{I}_C) = -(76e^{j173,1^0} + 76e^{j113,1^0}) = -(-75,45 + j9,13 - 29,8 + j69,9) = 131,62e^{-j36,9^0} \text{ A.}$$

Векторную диаграмму (рисунок 3.14,б) строим в следующем порядке. Сначала в выбранном масштабе строим векторы фазных э.д.с.  $\underline{E}_A, \underline{E}_B, \underline{E}_C$  и линейных напряжений генератора  $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}$  и  $\underline{U}_{CA}$ , как это делалось в предыдущих примерах. Векторы, соединяющие точку  $N_1$  с точками  $B$  и  $C$ , соответственно будут фазными напряжениями  $\underline{U}_B = -\underline{U}_{AB}$  и  $\underline{U}_C = \underline{U}_{CA}$ . Векторы токов  $\underline{I}_B$  и  $\underline{I}_C$  строим в выбранном масштабе отстающими от соответствующих фазных напряжений на угол  $\varphi = 36,9^0$ . Вектор тока  $\underline{I}_A$  можно построить либо по расчетным данным ( $\underline{I}_A = 131,62e^{-j36,9^0}$ ), либо как вектор, равный геометрической сумме векторов  $\underline{I}_B$  и  $\underline{I}_C$  и повернутый на  $180^0$ .

### 3.3. Расчет трехфазной цепи при соединении нагрузки в треугольник

На рисунке 3.15 показана схема соединения фаз нагрузки треугольником. Сопротивлениям фаз нагрузки при таком соединении принято присваивать двойной индекс:  $Z_{AB}, Z_{BC}, Z_{CA}$ .

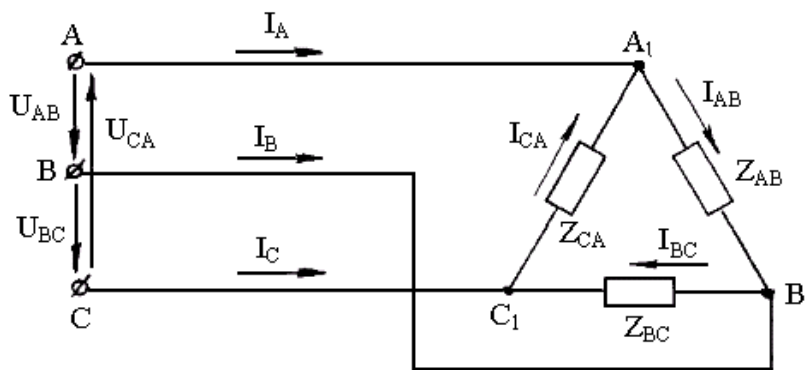


Рисунок 3.15 - Трехфазная цепь при соединении нагрузки треугольником

Из схемы соединения следует, что каждая фаза нагрузки оказывается включенной на линейное напряжение генератора, т.е. линейное напряжение генератора является фазным напряжением нагрузки:

$$U_\phi = U_L. \quad (3.14)$$

Фазные токи нагрузки  $I_{AB}, I_{BC}, I_{CA}$  отличаются от линейных токов  $I_A, I_B, I_C$ . Положительное направление фазных токов обычно выбирают так, как показано на рисунке 3.15.

В общем случае, при любой нагрузке, токи в фазах рассчитывают по закону Ома:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}}; \quad \underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}}; \quad \underline{I}_{CA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}}, \quad (3.15)$$

а линейные – по первому закону Кирхгофа. Для узлов  $A_1, B_1, C_1$  соответственно будем иметь:

$$\begin{aligned} \underline{I}_A - \underline{I}_{AB} + \underline{I}_{CA} &= 0; & \underline{I}_B + \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{BC} &= 0; & \underline{I}_C - \underline{I}_{CA} + \underline{I}_{BC} &= 0, \\ \text{или} \quad \underline{I}_A &= \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA}; & \underline{I}_B &= \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB}; & \underline{I}_C &= \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

**1. Симметричный режим.** В этом случае ( $Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA}$ ) фазы находятся в одинаковых условиях и фазные токи  $\underline{I}_{AB}, \underline{I}_{BC}, \underline{I}_{CA}$ , определяемые по (3.15), представляют симметричную систему, т.е. одинаковы по величине и сдвинуты относительно друг друга на угол  $120^\circ$ .

Линейные токи  $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$ , определяемые в соответствии с (3.16), также будут образовывать симметричную систему. Поэтому при симметричной нагрузке, соединенной в треугольник, расчет можно проводить на одну фазу, а электрические величины для двух других фаз записывать через фазовый оператор  $a$ .

Определим комплекс линейного тока в фазе  $A$ .

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA} = \underline{I}_{AB} - a\underline{I}_{AB} = \underline{I}_{AB}(1 - a) = \\ &= \underline{I}_{AB}\left[1 - \left(-0,5 + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \underline{I}_{AB}\left(1,5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{AB}e^{-j30^\circ}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

так как

$$\sqrt{3} \cdot e^{-j30^\circ} = \sqrt{3}(\cos -30^\circ + j \sin -30^\circ) = \sqrt{3}(\cos 30^\circ - j \sin 30^\circ) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right) = 1,5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из (3.17) следует, что в симметричном режиме при соединении нагрузки треугольником линейный ток в  $\sqrt{3}$  раз больше фазного:

$$I_L = \sqrt{3} \cdot I_\phi \quad (3.18)$$

и отстает от фазного тока на угол  $30^\circ$ .

**2. Несимметричный режим.** При несимметричной нагрузке, когда сопротивления по фазам различны, расчет на одну фазу выполнять нельзя. В этом случае сначала определяют токи в каждой фазе  $\underline{I}_{AB}, \underline{I}_{BC}, \underline{I}_{CA}$  по формулам (3.15), а затем по выражениям (3.16) рассчитывают линейные токи  $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$ . При этом соотношение (3.17) чаще всего не выполняется.

На рисунке 3.16 помещена топографическая векторная диаграмма напряжений, совмещенная с векторной диаграммой токов, при различной нагрузке фаз. Построение топографической диаграммы напряжений аналогично построению при схеме соединения звездой. Векторную диаграмму токов строят начиная с фазных токов  $\underline{I}_{AB}, \underline{I}_{BC}, \underline{I}_{CA}$ , сдвиги по фазе которых относительно линейных напряжений  $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$  определяют комплексные сопротивления фаз (диаграмма токов построена для активно-индуктивной нагрузки). Затем в соответствии с (3.16) строят векторы линейных токов  $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$ . К примеру, необходимо построить вектор линейного тока  $\underline{I}_A$ . В соответствии с (3.16) будем иметь:  $\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA}$ , или  $\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} + (-\underline{I}_{CA})$ . Таким образом, для построения вектора  $\underline{I}_A$  необходимо к вектору  $\underline{I}_{AB}$  прибавить вектор  $\underline{I}_{CA}$ , повернутый на  $180^\circ$ . Аналогично строятся векторы  $\underline{I}_B$  и  $\underline{I}_C$ .

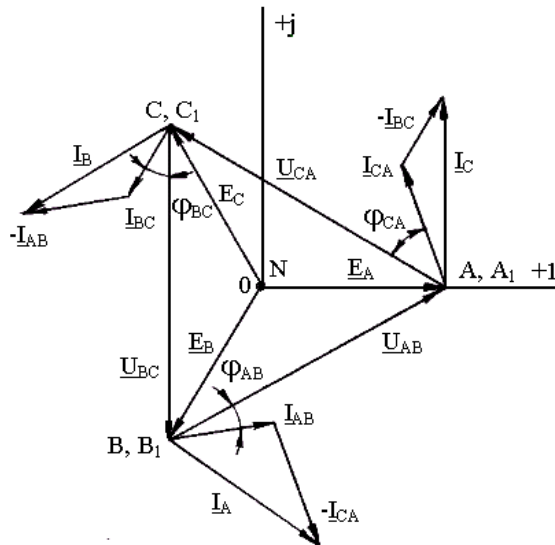


Рисунок 3.16 - Топографическая векторная диаграмма при соединении нагрузки треугольником в несимметричном режиме

Часто строят обычные (лучевые) векторные диаграммы напряжений (не топографические), совмещенные с диаграммой токов (рисунок 3.17). В этом случае векторы проводят из начала координат комплексной плоскости, расположив вектор напряжения  $\underline{U}_{AB}$  по положительной полуоси вещественных чисел.

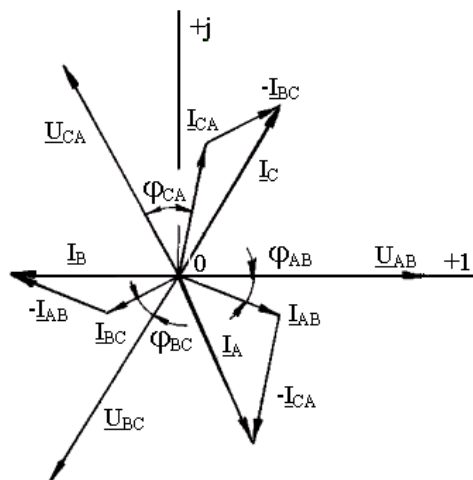


Рисунок 3.17 - Лучевая векторная диаграмма

Векторная диаграмма при симметричной нагрузке будет отличаться от диаграмм рисунков 3.15 и 3.17 тем, что векторы фазных токов на диаграмме будут сдвинуты относительно соответствующих фазных (они же линейные) напряжений на одинаковый угол  $\varphi_\phi$ , так как при симметричной нагрузке  $\varphi_{AB} = \varphi_{BC} = \varphi_{CA} = \varphi_\phi$ . Фазные и линейные токи при этом будут представлять собой симметричные системы.

**Пример 3.6.** Пусть для схемы рисунка 3.15 известны линейное напряжение генератора  $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 380$  В и комплексы сопротивлений фаз нагрузки  $Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA} = Z_{\phi} = 4 + j3 = 5e^{j36,9^\circ}$  Ом. Определить фазные и линейные токи: а) в симметричном режиме; б) при обрыве фазы; в) при обрыве линейного провода. Построить для каждого случая векторную диаграмму напряжений и токов.

**Решение.** Из-за того, что нагрузка симметричная, расчет проводим на одну фазу. Если принять что  $\underline{U}_{AB} = U_{AB} = 380$  В, то ток  $\underline{I}_{AB}$  определится:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{380}{5e^{j36,9^\circ}} = 76e^{-j36,9^\circ} \text{ А.}$$

В двух других фазах токи определим через фазовый оператор.

$$\underline{I}_{BC} = a^2 \underline{I}_{AB} = 76e^{-j156,9^\circ} \text{ А; } \quad \underline{I}_{CA} = a \underline{I}_{AB} = 76e^{j83,1^\circ} \text{ А.}$$

Комплекс линейного тока  $I_A$  в соответствии с (3.17) определится

$$\underline{I}_A = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{AB} e^{-j30^\circ} = 131,64e^{-j66,9^\circ} \text{ А.}$$

Линейные токи  $I_B$  и  $I_C$ :

$$\underline{I}_B = a^2 \underline{I}_A = 131,64e^{-j186,9^\circ} \text{ А; } \quad \underline{I}_C = a \underline{I}_A = 131,64e^{j53,1^\circ} \text{ А.}$$

Векторная диаграмма для симметричного режима (рисунок 3.18) строится в следующем порядке. Сначала изображается звезда векторов линейных напряжений генератора  $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$ , а затем в масштабе строятся векторы фазных токов  $\underline{I}_{AB}, \underline{I}_{BC}, \underline{I}_{CA}$ , отстающих от соответствующие линейных напряжений на угол  $\varphi = 36,9^\circ$ . Векторы линейных токов строятся либо по расчетным данным, либо по соотношениям (3.16).

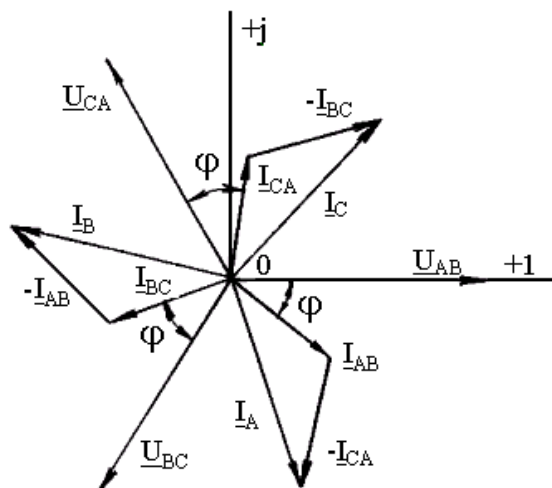


Рисунок 3.18 - Векторная диаграмма в симметричном режиме для соединения нагрузки треугольником

**В случае обрыва фазы,** к примеру АВ, (рисунок 3.19,а) ток в поврежденной фазе  $\underline{I}_{AB} = 0$ , а токи в неповрежденных фазах не изменятся по сравнению с симметричным режимом, так как фазные напряжения  $\underline{U}_{BC}$  и  $\underline{U}_{CA}$ , равные линейным, не изменяются, т.е.  $\underline{I}_{BC} = 76e^{-j156,9^\circ}$  А,  $\underline{I}_{CA} = 76e^{j83,1^\circ}$  А. Линейные

токи при этом, как следует из схемы (рисунок 3.19,а) и в соответствии с соотношениями (3.16), определяются:

$$\underline{I}_A = -\underline{I}_{CA} = 76e^{-j96,9^\circ} \text{ A}; \quad \underline{I}_B = \underline{I}_{BC} = 76e^{-j156,9^\circ} \text{ A}; \quad \underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC} = 131,64e^{j53,1^\circ} \text{ A}.$$

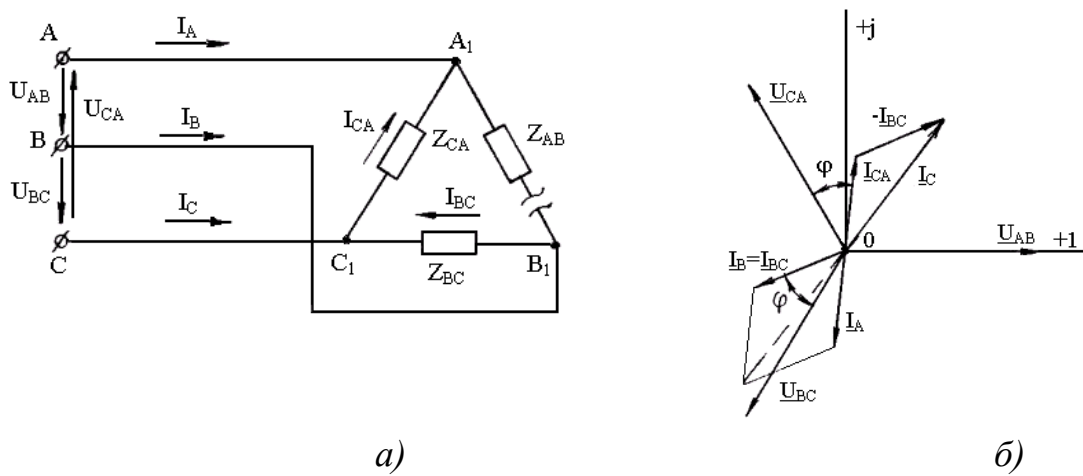


Рисунок 3.19 - Обрыв фазы в трехфазной цепи, соединенной треугольником, и ее векторная диаграмма

Линейный ток  $\underline{I}_C$  также не изменился по сравнению с симметричным режимом.

Ранее указывалось, что в трехфазной трехпроводной цепи сумма линейных токов в соответствии с первым законом Кирхгофа равна нулю. Проверим это:

$$\begin{aligned} \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C &= 76e^{-j96,9^\circ} + 76e^{-j156,9^\circ} + 131,64e^{j53,1^\circ} = \\ &= -9,13 - j75,45 - 69,9 - j29,82 + 79,03 + j105,27 = 0. \end{aligned}$$

При построении векторной диаграммы (рисунок 3.19,б) сначала изображаем векторы линейных напряжений генератора, а затем откладываем векторы фазных токов  $\underline{I}_{BC}$  и  $\underline{I}_{CA}$ , отстающие соответственно от напряжений  $\underline{U}_{BC}$  и  $\underline{U}_{CA}$  на угол  $\varphi = 36,9^\circ$ . Вектор линейного тока  $\underline{I}_B$  занимает то же положение, что и вектор фазного тока  $\underline{I}_{BC}$ . Линейный ток  $\underline{I}_A = -\underline{I}_{CA}$ , поэтому на векторной диаграмме вектор тока  $\underline{I}_A$  будет представлять собой повернутый на  $180^\circ$  вектор  $\underline{I}_{CA}$ . Линейный ток  $\underline{I}_C$  строится точно так же, как и при построении диаграммы для симметричного режима. Из векторной диаграммы также следует, что геометрическая сумма векторов  $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$  равна нулю.

**При обрыве линейного провода** (допустим А) ток в нем  $\underline{I}_A = 0$  и к нагрузке подводится только напряжение  $\underline{U}_{BC}$  (рисунок 3.20,а). Поэтому ток в фазе ВС будет такой же, как и в симметричном режиме, т.е.  $\underline{I}_{BC} = 76e^{-j156,9^\circ}$  А. На это же напряжение включены два последовательно соединенных сопротивления фаз  $\underline{Z}_{AB}$  и  $\underline{Z}_{CA}$ , ток через которые определится как:

$$\underline{I}_{AB} = \underline{I}_{CA} = -\frac{U_{BC}}{2\underline{Z}_{\phi}} = \frac{380e^{j60^\circ}}{2 \cdot 5e^{j36,9^\circ}} = 38e^{j23,1^\circ} \text{ A.}$$

Линейные токи на основании (3.16) при  $I_A = 0$ :

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB} = 76e^{-j156,9^\circ} - 38e^{j23,1^\circ} = 76e^{-j156,9^\circ} + 38e^{-j156,9^\circ} = 114e^{-j156,9^\circ} \text{ A;}$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC} = 38e^{j23,1^\circ} - 76e^{-j156,9^\circ} = 38e^{j23,1^\circ} + 76e^{j23,1^\circ} = 114e^{j23,1^\circ} \text{ A.}$$

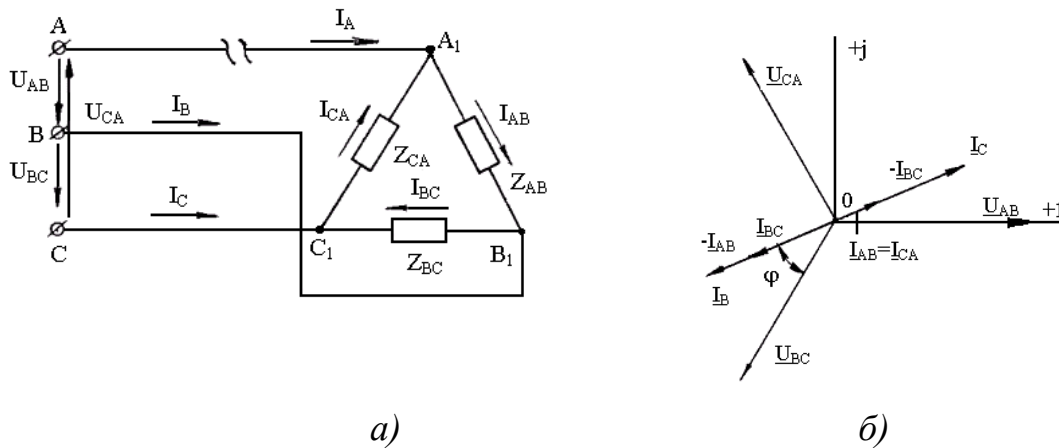


Рисунок 3.20 - Обрыв линейного провода в трехфазной цепи, соединенной треугольником, и ее векторная диаграмма

Векторная диаграмма в режиме обрыва линейного провода А представлена на рисунке 3.20,б.

**Пример 3.7.** К трехфазному симметричному генератору с линейным напряжением  $U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$  (рисунок 3.21) подключена нагрузка с сопротивлениями фаз:  $R_1 = 18 \text{ Ом}$ ,  $X_{L_1} = 14 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 24 \text{ Ом}$ ,  $X_{L_2} = 27 \text{ Ом}$ ,  $X_C = 31 \text{ Ом}$ . Определить токи в цепи и построить топографическую векторную диаграмму напряжений, совмещенную с векторной диаграммой токов.

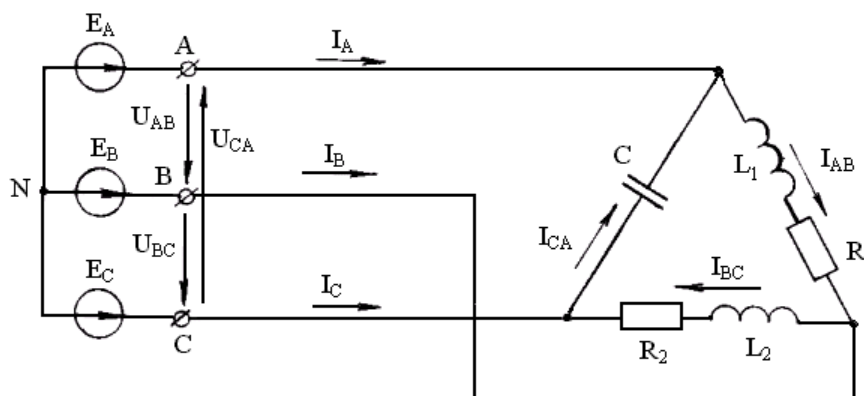


Рисунок 3.21 - Трехфазная несимметричная нагрузка, соединенная треугольником

**Решение.** Так как нагрузка несимметричная, то расчет проводим для каждой фазы.

Если э.д.с. фазы  $A$  генератора направить по вещественной оси, т.е.  $\underline{E}_A = E = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} = 220$  В (рисунок 3.3), то линейные напряжения генератора запишутся:

$$\underline{U}_{AB} = 380e^{j30^\circ} \text{ В}; \quad \underline{U}_{BC} = 380e^{-j90^\circ} \text{ В}; \quad \underline{U}_{CA} = 380e^{j150^\circ} \text{ В}.$$

Комплексы сопротивлений фаз нагрузки:

$$\underline{Z}_{AB} = R_1 + jX_{L_1} = 18 + j14 = 22,8e^{j37,87^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{BC} = R_2 + jX_{L_2} = 24 + j27 = 36,12e^{j48,37^\circ} \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{CA} = -jX_C = -j31 = 31e^{-j90^\circ} \text{ Ом}.$$

Фазные токи нагрузки:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{380e^{j30^\circ}}{22,8e^{j37,87^\circ}} = 16,67e^{-j7,87^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = \frac{380e^{-j90^\circ}}{36,12e^{j48,37^\circ}} = 10,52e^{-j138,37^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{CA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{380e^{j150^\circ}}{31e^{-j90^\circ}} = 12,26e^{j240^\circ} \text{ А}.$$

В соответствии с (3.16) определим линейные токи:

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA} = 16,67e^{-j7,87^\circ} - 12,26e^{j240^\circ} = \\ &= 16,51 - j2,28 - (-6,13 - j10,62) = 22,64 + j8,34 = 24,13e^{j20,22^\circ} \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_B &= \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB} = 10,52e^{-j138,37^\circ} - 16,67e^{-j7,87^\circ} = \\ &= -7,86 - j6,99 - (16,51 - j2,28) = -24,37 - j4,71 = 24,82e^{j190,94^\circ} \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_C &= \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC} = 12,26e^{j240^\circ} - 10,52e^{-j138,37^\circ} = \\ &= -6,13 - j10,62 - (-7,86 - j6,99) = 1,73 - j3,63 = 4,02e^{-j64,52^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$

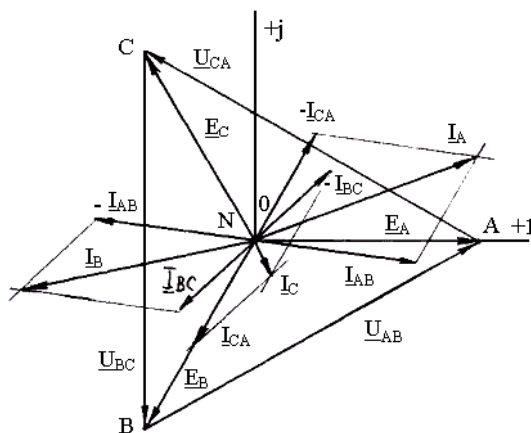


Рисунок 3.22 – Топографическая векторная диаграмма при соединении нагрузки в треугольник в несимметричном режиме

Результаты расчета линейных токов проверим составлением уравнения по первому закону Кирхгофа для узла  $N$  (рисунок 3.21), т.е.

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0, \quad 22,64 + j8,34 - 24,37 - j4,71 + 1,73 - j3,63 = 0.$$

Совмещенная векторная диаграмма представлена на рисунке 3.22.

**3. Расчет трехфазной цепи при соединении нагрузки в треугольник с учетом сопротивлений линейных проводов.** В расчетах, приведенных в примерах 3.6 и 3.7, пренебрегали сопротивлением питающих проводов. Если необходимо учитывать сопротивления линейных проводов, то оказывается, что из-за падений напряжений на этих сопротивлениях линейные напряжения генератора уже не являются фазными напряжениями на нагрузке. В этом случае расчет проводится следующим образом. Сначала преобразовывают треугольник сопротивлений нагрузки в эквивалентную звезду, а затем находят линейные токи (§3.2), рассчитывая на одну фазу, если нагрузка симметричная, либо через напряжение смещения нейтрали, если нагрузка несимметричная. После определения линейных токов возвращаются к исходной схеме и определяют фазные напряжения на нагрузке и фазные токи. Подробный расчет такой цепи приведен в примере 3.8.

**Пример 3.8.** Выполнить расчет трехфазной цепи (рисунок 3.23) и построить топографическую векторную диаграмму напряжений, совмещенную с векторной диаграммой токов, если комплексные сопротивления линейных проводов и фаз нагрузки:  $\underline{Z}_{npA} = (2 + j4) \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_{npB} = (3 + j2) \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_{npC} = (4 + j2) \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_{AB} = 21 + j20 = 29e^{j43,6^\circ} \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_{BC} = 16 + j25 = 29,68e^{j57,38^\circ} \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_{CA} = 15 + j19 = 24,2e^{j51,71^\circ} \text{ Ом}$ , а линейное напряжение генератора  $u_{AB} = 535 \sin(\omega \cdot t + 30^\circ) \text{ В}$ .

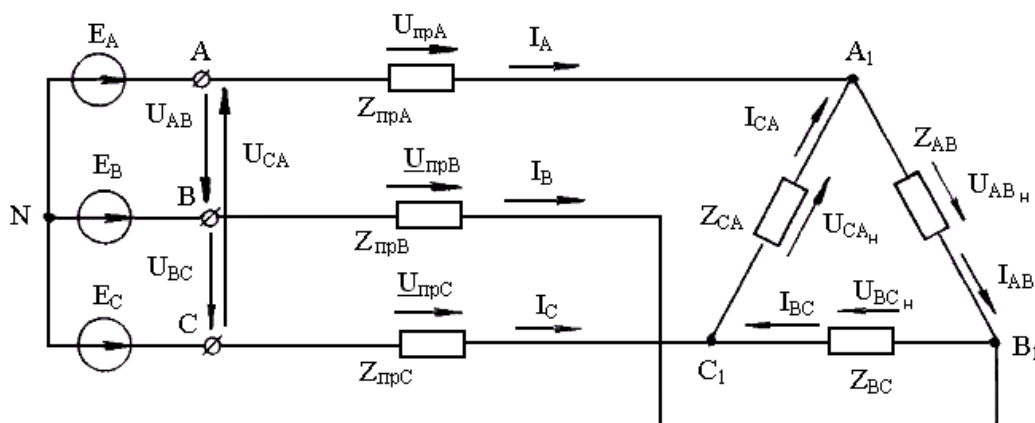


Рисунок 3.23 - Трехфазная цепь с учетом сопротивлений линейных проводов

**Решение.** Заменяем треугольник сопротивлений  $\underline{Z}_{AB}, \underline{Z}_{BC}, \underline{Z}_{CA}$  эквивалентной звездой  $\underline{Z}_a, \underline{Z}_b, \underline{Z}_c$  (рисунок 3.24).



$$\underline{Z}_a = \frac{\underline{Z}_{AB} \cdot \underline{Z}_{CA}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA}} = 6,08 + j5,96 = 8,51e^{j44,41^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_b = \frac{\underline{Z}_{AB} \cdot \underline{Z}_{BC}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA}} = 6,7 + j8 = 10,44e^{j50,08^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{Z}_{BC} \cdot \underline{Z}_{CA}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA}} = 4,59 + j7,4 = 8,71e^{j58,19^\circ} \text{ Ом}.$$

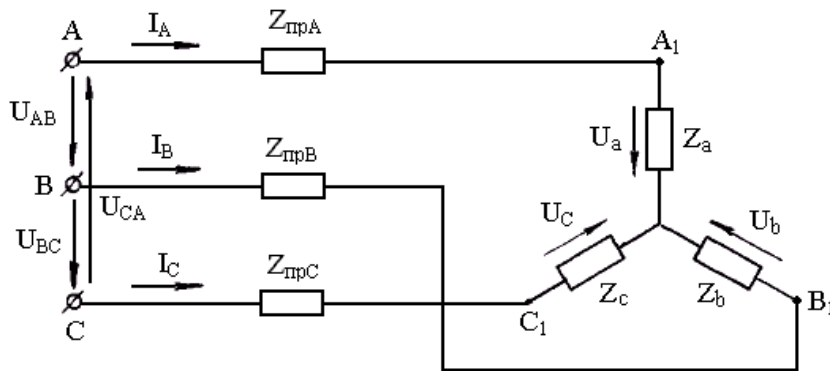


Рисунок 3.24 - К замене треугольника сопротивлений эквивалентной звездой

Так как сопротивления линейных проводов включены последовательно с сопротивлениями лучей звезды, то сопротивления и проводимости каждой из фаз будут:

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_{npA} + \underline{Z}_a = 2 + j4 + 6,08 + j5,96 = 8,08 + j9,96 = 12,83e^{j50,95^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_B = \underline{Z}_{npB} + \underline{Z}_b = 3 + j2 + 6,7 + j8 = 9,7 + j10 = 13,93e^{j45,87^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_C = \underline{Z}_{npC} + \underline{Z}_c = 4 + j2 + 4,59 + j7,4 = 8,59 + j9,4 = 12,73e^{j47,58^\circ} \text{ Ом}.$$

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A} = 0,0779 e^{-j50,95^\circ} \text{ См}; \quad \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B} = 0,0718 e^{-j45,87^\circ} \text{ См};$$

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = 0,0786 e^{-j47,58^\circ} \text{ См}.$$

Так как по условию примера задано мгновенное значение линейного напряжения генератора, то комплекс его определится как

$$\underline{U}_{AB} = \frac{U_{mAB}}{\sqrt{2}} e^{j\psi} = \frac{535}{\sqrt{2}} e^{j30^\circ} = 380 e^{j30^\circ} \text{ В, а фазные э.д.с. запишутся:}$$

$$\underline{E}_A = \frac{\underline{U}_{AB}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = 220 \text{ В}; \quad \underline{E}_B = 220e^{-j120^\circ} \text{ В}; \quad \underline{E}_C = 220e^{j120^\circ} \text{ В}.$$

Напряжение смещения нейтрали по формуле (3.13)

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{E}_A \underline{Y}_A + \underline{E}_B \underline{Y}_B + \underline{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} =$$

$$= \frac{220 \cdot 0,0779 e^{-j50,95^\circ} + 220 e^{-j120^\circ} \cdot 0,0718 e^{-j45,87^\circ} + 220 e^{j120^\circ} \cdot 0,0786 e^{-j47,58^\circ}}{0,077 e^{-j50,95^\circ} + 0,0718 e^{-j45,87^\circ} + 0,0786 e^{-j47,58^\circ}} =$$

$$= 4,29 + j0,3 = 4,3e^{j3,86^\circ} \text{ В}.$$

По формулам (3.11) определяем фазные напряжения.

$$\begin{aligned}\underline{U}_A &= \underline{E}_A - \underline{U}_N = 220 - 4,29 - j0,3 = 215,7 \text{ В}; \\ \underline{U}_B &= \underline{E}_B - \underline{U}_N = 220e^{-j120^\circ} - 4,3e^{j3,86^\circ} = 221,92e^{-j121^\circ} \text{ В}; \\ \underline{U}_C &= \underline{E}_C - \underline{U}_N = 220e^{j120^\circ} - 4,3e^{j3,86^\circ} = 221,72e^{j121^\circ} \text{ В}.\end{aligned}$$

Линейные токи:

$$\begin{aligned}\underline{I}_A &= \underline{U}_A \cdot \underline{Y}_A = 215,7 \cdot 0,0779e^{-j50,95^\circ} = 16,8e^{-j50,95^\circ} \text{ А}; \\ \underline{I}_B &= \underline{U}_B \cdot \underline{Y}_B = 221,92e^{-j121^\circ} \cdot 0,0718e^{-j45,87^\circ} = 15,93e^{-j166,87^\circ} \text{ А}; \\ \underline{I}_C &= \underline{U}_C \cdot \underline{Y}_C = 221,72e^{j121^\circ} \cdot 0,0786e^{-j47,58^\circ} = 17,42e^{j73,42^\circ} \text{ А}.\end{aligned}$$

Фазные напряжения на лучах звезды (рисунок 3.24):

$$\begin{aligned}\underline{U}_a &= \underline{I}_A \cdot \underline{Z}_a = 16,8e^{-j50,95^\circ} \cdot 8,51e^{j44,41^\circ} = 142,97e^{-j6,54^\circ} \text{ В}; \\ \underline{U}_b &= \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_b = 15,93e^{-j166,87^\circ} \cdot 10,44e^{j50,08^\circ} = 166,31e^{-j116,79^\circ} \text{ В}; \\ \underline{U}_c &= \underline{I}_C \cdot \underline{Z}_c = 17,42e^{j73,42^\circ} \cdot 8,71e^{j58,19^\circ} = 151,73e^{j131,61^\circ} \text{ В}.\end{aligned}$$

Фазные напряжения на нагрузке (рисунок 3.23), соединенной в треугольник:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{AB_H} &= \underline{U}_a - \underline{U}_b = 142,97e^{-j6,54^\circ} - 166,31e^{-j116,79^\circ} = 254e^{j31,34^\circ} \text{ В}; \\ \underline{U}_{BC_H} &= \underline{U}_b - \underline{U}_c = 166,31e^{-j116,79^\circ} - 151,73e^{j131,61^\circ} = 263,17e^{-j84,4^\circ} \text{ В}; \\ \underline{U}_{CA_H} &= \underline{U}_c - \underline{U}_a = 151,73e^{j131,61^\circ} - 142,97e^{-j6,54^\circ} = 275,25e^{j151,87^\circ} \text{ В}.\end{aligned}$$

Фазные токи в нагрузке:

$$\begin{aligned}\underline{I}_{AB} &= \frac{\underline{U}_{AB_H}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{254e^{j31,34^\circ}}{29e^{j43,6^\circ}} = 8,76e^{-j12,26^\circ} \text{ А}; \\ \underline{I}_{BC} &= \frac{\underline{U}_{BC_H}}{\underline{Z}_{BC}} = \frac{263,17e^{-j84,4^\circ}}{29,68e^{j57,38^\circ}} = 8,87e^{-j141,78^\circ} \text{ А}; \\ \underline{I}_{CA} &= \frac{\underline{U}_{CA_H}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{275,25e^{j151,87^\circ}}{24,2e^{j51,71^\circ}} = 11,37e^{j100,16^\circ} \text{ А}.\end{aligned}$$

Комплексы падений напряжений на сопротивлениях линейных проводов (рисунок 3.23):

$$\begin{aligned}\underline{U}_{npA} &= \underline{I}_A \cdot \underline{Z}_{npA} = 16,8e^{-j50,95^\circ} \cdot (2 + j4) = 75,1e^{j12,48^\circ} \text{ В}; \\ \underline{U}_{npB} &= \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_{npB} = 15,93e^{-j166,87^\circ} \cdot (3 + j2) = 57,35e^{-j133,17^\circ} \text{ В}; \\ \underline{U}_{npC} &= \underline{I}_C \cdot \underline{Z}_{npC} = 17,42e^{j73,42^\circ} \cdot (4 + j2) = 77,86e^{j100^\circ} \text{ В}.\end{aligned}$$

Топографическая векторная диаграмма цепи, соединенной треугольником, при учете сопротивлений линейных проводов (рисунок 3.25) строится следующим образом. После изображения векторов фазных э.д.с. и линейных напряжений генератора откладываются векторы падений напряжений на сопротивлениях линейных проводов  $\underline{U}_{npA}$ ,  $\underline{U}_{npB}$ ,  $\underline{U}_{npC}$ , направленные своими концами соответственно к точкам А, В и С. Начала этих векторов являются точками  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Если соединить эти точки, то получим векторы фазных напряжений  $\underline{U}_{ab}$ ,  $\underline{U}_{bc}$ ,  $\underline{U}_{ca}$  нагрузки, соединенной в треугольник.

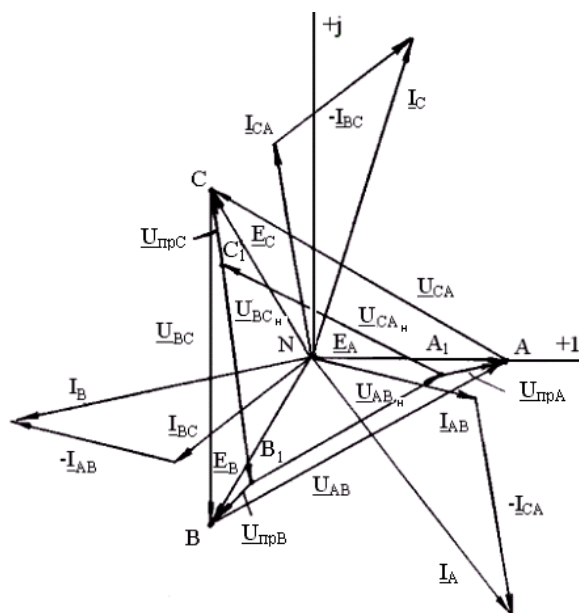


Рисунок 3.25 – Топографическая векторная диаграмма цепи при учете сопротивлений линейных проводов

### 3.4. Мощность трехфазной цепи

Как уже отмечалось, трехфазная цепь представляет собой совокупность трех однофазных цепей. Очевидно, что активная и реактивная мощности трехфазной цепи в общем случае, при любой нагрузке, равны суммам мощностей отдельных фаз.

Активная мощность трехфазной цепи  $P = P_A + P_B + P_C$ , если нагрузка соединена звездой, и  $P = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA}$  при соединении фаз нагрузки треугольником. Здесь  $P_A, P_B, P_C$  - активные мощности фаз при соединении нагрузки в звезду, а  $P_{AB}, P_{BC}, P_{CA}$  - при соединении треугольником. Активная мощность каждой фазы рассчитывается так же, как и для однофазной цепи:

$$P_\phi = U_\phi I_\phi \cos\varphi = R_\phi I_\phi^2.$$

В случае симметричной нагрузки мощности всех фаз одинаковы, поэтому активная мощность трехфазной цепи равна утроенной мощности одной фазы:

$$P = 3P_\phi = 3U_\phi I_\phi \cos\varphi.$$

Часто мощность при симметричной нагрузке выражают через линейные величины. При соединении нагрузки звездой  $U_\phi = \frac{U_L}{\sqrt{3}}$ , а  $I_\phi = I_L$ , поэтому активная мощность:

$$P = 3U_\phi I_\phi \cos\varphi = 3\left(\frac{U_L}{\sqrt{3}}\right) I_L \cos\varphi = \sqrt{3}U_L I_L \cos\varphi. \quad (3.19)$$

Такая же формула будет соответствовать и соединению нагрузки треугольником ( $U_\phi = U_L$ ,  $I_\phi = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$ ):

$$P = 3U_\phi I_\phi \cos\varphi = 3 \cdot U_L \left( \frac{I_L}{\sqrt{3}} \right) \cos\varphi = \sqrt{3} U_L I_L \cos\varphi.$$

Аналогичным образом можно записать выражение для реактивной мощности.

Реактивная мощность трехфазной цепи при несимметричной нагрузке  $Q = Q_A + Q_B + Q_C$  для схемы соединения фаз нагрузки звездой или  $Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA}$  для схемы соединения треугольником. Реактивная мощность каждой фазы при этом определяется как

$$Q_\phi = U_\phi I_\phi \sin\varphi = X_\phi \cdot I_\phi^2.$$

В симметричном режиме:

$$Q = 3Q_\phi = \sqrt{3} U_L I_L \sin\varphi. \quad (3.20)$$

Угол  $\varphi$  в этих формулах - это угол сдвига фазного тока относительно одноименного фазного напряжения.

Полная мощность трехфазной цепи при несимметричной нагрузке определяется из выражения

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

а в симметричном режиме

$$S = 3S_\phi = 3U_\phi I_\phi = \sqrt{3} U_L I_L. \quad (3.21)$$

Мощность трехфазной цепи по аналогии с однофазной цепью может быть определена в комплексной форме. Так, для схемы соединения звездой:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{S}_A + \underline{S}_B + \underline{S}_C = \underline{U}_A \underline{I}_A^* + \underline{U}_B \underline{I}_B^* + \underline{U}_C \underline{I}_C^* = \\ &= P + jQ = (P_A + P_B + P_C) + j(Q_A + Q_B + Q_C). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Результат расчета трехфазной цепи также проверяют составлением баланса мощностей. При этом мощности источников  $P_u$  и  $Q_u$  определяют по формуле (3.22), а мощности в фазах нагрузки  $P_n$  и  $Q_n$  - по формулам (2.76).

**Пример 3.9.** Проверить расчет трехфазной цепи, выполненной в примере 3.2, составлением баланса мощностей.

**Решение.** Мощность, вырабатываемая трехфазным источником электрической энергии:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{S}_A + \underline{S}_B + \underline{S}_C = \underline{E}_A \cdot \underline{I}_A^* + \underline{E}_B \underline{I}_B^* + \underline{E}_C \underline{I}_C^* = P_u + jQ_u = \\ &= 127 \cdot 6,35 + 127e^{-j120^\circ} \cdot 4,5e^{j165^\circ} + 127e^{j120^\circ} \cdot 8,47e^{-j210^\circ} = \\ &= (1211 - j671) \text{ ВА} \end{aligned}$$

Активная мощность в фазах нагрузки:

$$\begin{aligned} P_{II} &= I_A^2 \cdot R_A + I_B^2 \cdot R_B + I_C^2 \cdot R_C = \\ &= 6,35^2 \cdot 20 + 4,5^2 \cdot 20 + 8,47^2 \cdot 0 = 1211 \text{ Вт} \end{aligned}$$

Реактивная мощность в фазах нагрузки:

$$Q_{\Pi} = I_A^2 \cdot X_A + I_B^2 \cdot X_B + I_C^2 \cdot X_C = 6,35^2 \cdot 0 + 4,5^2 \cdot 20 + 8,47^2 \cdot (-15) = -j671 \text{вар.}$$

Очевидно, что расчет выполнен правильно, так как баланс соблюдается, т.е.  $P_u = P_n$ ,  $Q_u = Q_n$ .

### 3.5. Метод симметричных составляющих

Методы расчета несимметричных трехфазных цепей, рассмотренные выше, обычно применяются для анализа статических цепей, в которых отсутствуют вращающиеся электрические машины. Для расчета несимметричных режимов (короткие замыкания, обрывы проводов и т.д.) в трехфазных системах передачи и распределения электрической энергии, образованных источниками электрической энергии, линиями, трансформаторами и двигателями, применяют метод симметричных составляющих. Он основан на представлении любой несимметричной трехфазной системы электрических величин (э.д.с., напряжений, токов) тремя симметричными составляющими, так называемыми системами прямой, обратной и нулевой последовательностей.

На рисунке 3.26 в качестве примера показаны симметричные составляющие напряжений прямой, обратной и нулевой последовательностей.

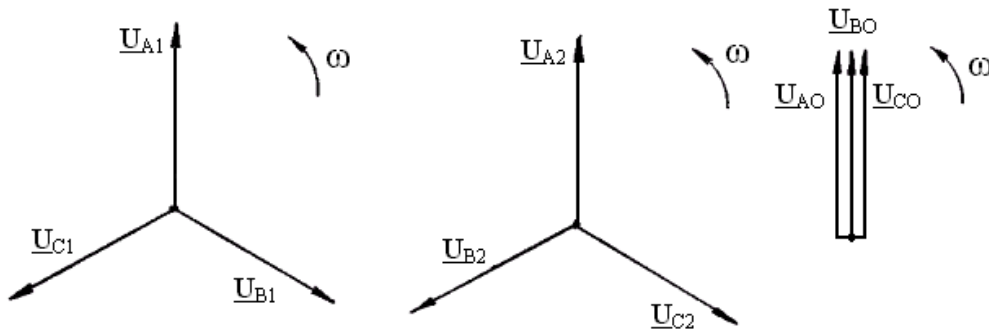


Рисунок 3.26 - Симметричные составляющие напряжений прямой, обратной и нулевой последовательностей

Система прямой последовательности состоит из трех вращающихся векторов  $\underline{U}_{A_1}, \underline{U}_{B_1}, \underline{U}_{C_1}$ , сдвинутых по фазе относительно друг друга на угол  $120^\circ$ . Прямая последовательность имеет прямой порядок чередования фаз, т.е. вектор  $\underline{U}_{B_1}$  отстает от вектора  $\underline{U}_{A_1}$ , а вектор  $\underline{U}_{C_1}$  опережает вектор  $\underline{U}_{A_1}$ .

Используя фазовый оператор, для прямой последовательности можно записать:

$$\underline{U}_{B_1} = a^2 \underline{U}_{A_1}; \quad \underline{U}_{C_1} = a \underline{U}_{A_1}. \quad (3.23)$$

Система обратной последовательности  $\underline{U}_{A_2}, \underline{U}_{B_2}, \underline{U}_{C_2}$  представляет собой три одинаковых вектора, сдвинутых относительно друг друга на  $120^\circ$ . Причем

вектор  $\underline{U}_{B_2}$  опережает  $\underline{U}_{A_2}$ , а вектор  $\underline{U}_{C_2}$  - отстает (обратный порядок чередования фаз). Для обратной последовательности можно записать:

$$\underline{U}_{B_2} = a\underline{U}_{A_2}; \quad \underline{U}_{C_2} = a^2\underline{U}_{A_2}. \quad (3.24)$$

Система нулевой последовательности образована тремя одинаковыми векторами  $\underline{U}_{A_0}, \underline{U}_{B_0}, \underline{U}_{C_0}$ , совпадающими по фазе:

$$\underline{U}_{A_0} = \underline{U}_{B_0} = \underline{U}_{C_0}. \quad (3.25)$$

Для выполнения условия возможности замены несимметричной системы, допустим, напряжения  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$ , тремя симметричными составляющими необходимо, чтобы соблюдались следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= \underline{U}_{A_1} + \underline{U}_{A_2} + \underline{U}_{A_0}; \\ \underline{U}_B &= \underline{U}_{B_1} + \underline{U}_{B_2} + \underline{U}_{B_0}; \\ \underline{U}_C &= \underline{U}_{C_1} + \underline{U}_{C_2} + \underline{U}_{C_0}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Т.е. напряжения на фазах А, В и С определяются как суммы соответствующих симметричных составляющих.

С учетом (3.23), (3.24) и (3.25) система уравнений (3.26) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= \underline{U}_{A_1} + \underline{U}_{A_2} + \underline{U}_{A_0}; \\ \underline{U}_B &= a^2\underline{U}_{A_1} + a\underline{U}_{A_2} + \underline{U}_{A_0}; \\ \underline{U}_C &= a\underline{U}_{A_1} + a^2\underline{U}_{A_2} + \underline{U}_{A_0}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Из системы уравнений (3.27) и определяются симметричные составляющие. Если сложить все уравнения системы (3.27) и учесть, что  $1 + a + a^2 = 0$ , то получим выражение для определения нулевой последовательности.

$$\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C = \underline{U}_{A_1}(1 + a + a^2) + \underline{U}_{A_2}(1 + a + a^2) + 3\underline{U}_{A_0}.$$

Отсюда: 
$$\underline{U}_{A_0} = \frac{1}{3}(\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C). \quad (3.28)$$

Выражение для напряжения прямой последовательности можно получить из сложения уравнений системы (3.27), предварительно умножив вторую строку на  $a$ , и третью строку на  $a^2$ .

$$\underline{U}_{A_1} = \frac{1}{3}(\underline{U}_A + a\underline{U}_B + a^2\underline{U}_C). \quad (3.29)$$

Аналогичным образом, умножив вторую строку на  $a^2$  и третью строку на  $a$  и сложив уравнения (3.27), получим:

$$\underline{U}_{A_2} = \frac{1}{3}(\underline{U}_A + a^2\underline{U}_B + a\underline{U}_C). \quad (3.30)$$

Выражения (3.28)-(3.30) являются общими. Их можно применять для токов, э.д.с., магнитных потоков и других величин.

**Пример 3.10.** Представить несимметричную трехфазную систему напряжений  $\underline{U}_A = 100 \text{ В}$ ,  $\underline{U}_B = 100e^{-j90^\circ} \text{ В}$ ,  $\underline{U}_C = 50e^{j120^\circ} \text{ В}$  (рисунок 3.27) симметричными составляющими.

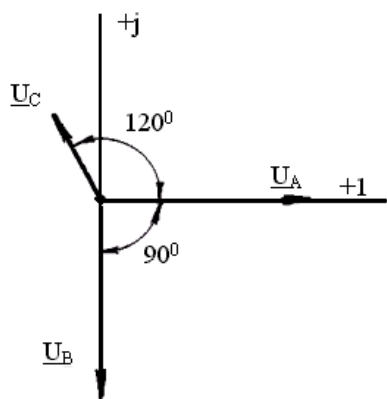


Рисунок 3.27 - Несимметричная трехфазная система напряжений  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$

**Решение:** Воспользовавшись формулами (3.28)-(3.30), определяем симметричные составляющие в фазе А:

$$\underline{U}_{A_1} = \frac{1}{3}(100 + e^{j120^\circ} \cdot 100e^{-j90^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 50e^{j120^\circ}) = 78,86 + j16,67 = 80,6e^{j11,93^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{A_2} = \frac{1}{3}(100 + e^{-j120^\circ} \cdot 100e^{-j90^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 50e^{j120^\circ}) = -3,87 + j2,23 = 4,47e^{j150^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{A_0} = \frac{1}{3}(100 + 100e^{-j90^\circ} + 50e^{j120^\circ}) = 25 - j18,9 = 31,33e^{-j37,1^\circ} \text{ В}.$$

В соответствии с формулами (3.23)-(3.25) симметричные составляющие напряжений в фазах В и С определяются:

$$\underline{U}_{B1} = a^2 \underline{U}_{A1} = e^{-j120^\circ} \cdot 80,6e^{j11,93^\circ} = 80,6e^{-j108,07^\circ} = (-25 - j76,63) \text{ В};$$

$$\underline{U}_{C1} = a \underline{U}_{A1} = e^{j120^\circ} \cdot 80,6e^{j11,93^\circ} = 80,6e^{j131,93^\circ} = (-53,86 + j59,96) \text{ В};$$

$$\underline{U}_{B2} = a \underline{U}_{A2} = e^{j120^\circ} \cdot 4,47e^{j150^\circ} = 4,47e^{-j90^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{C2} = a^2 \underline{U}_{A2} = e^{-j120^\circ} \cdot 4,47e^{j150^\circ} = 4,47e^{j30^\circ} = (3,87 + j2,23) \text{ В}.$$

$$\underline{U}_{A_0} = \underline{U}_{B_0} = \underline{U}_{C_0} = 25 - j18,9 = 31,33e^{j37,1^\circ} \text{ В}.$$

Результат разложения несимметричной системы  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$  на симметричные составляющие проверим подстановкой полученных значений для симметричных составляющих в систему уравнений (3.26):

$$\underline{U}_A = \underline{U}_{A1} + \underline{U}_{A2} + \underline{U}_{A0} = 78,86 + j16,67 - 3,87 + j2,23 + 25 - j18,9 = 100 \text{ В};$$

$$\underline{U}_B = \underline{U}_{B1} + \underline{U}_{B2} + \underline{U}_{B0} = -25 - j76,63 - j4,47 + 25 - j18,9 = -j100 = 100e^{-j90^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_C = \underline{U}_{C1} + \underline{U}_{C2} + \underline{U}_{C0} = -53,86 + j59,96 + 3,87 + j2,23 + 25 - j18,9 =$$

$$= -24,99 + j43,29 = 50e^{j120^\circ} \text{ В}.$$

На практике трехфазная цепь в нормальном режиме работы в большинстве случаев симметрична. В аварийных ситуациях (короткие замыкания, обрыв фазы) симметрия нарушается. Поэтому при расчете таких

режимов методом симметричных составляющих исходную несимметричную схему заменяют эквивалентной симметричной. Для этого в месте несимметрии вводят несимметричную систему напряжений или токов, которую представляют симметричными составляющими.

Симметричные составляющие определяют из схем замещения для каждой последовательности в отдельности. Это обстоятельство вызвано тем, что сопротивление на фазу для одного и того же элемента различно для различных последовательностей. К примеру, сопротивление на фазу трехфазной линии передачи для прямой последовательности  $\underline{Z}_{Л1}$  равно сопротивлению линии для обратной последовательности  $\underline{Z}_{Л2}$  и не равно сопротивлению линии для нулевой последовательности  $\underline{Z}_{Л0}$ . Для трехфазного трансформатора сопротивление на фазу для нулевой последовательности  $\underline{Z}_{Т0}$  не равно сопротивлению на фазу для прямой последовательности  $\underline{Z}_{Т1}$ , но  $\underline{Z}_{Т1} = \underline{Z}_{Т2}$ . Сопротивления фазы токам разных последовательностей трехфазного асинхронного двигателя оказываются разными, т.е.  $Z_{Д1} \neq Z_{Д2} \neq Z_{Д0}$ .

После нахождения симметричных составляющих искомую величину (ток или напряжение) определяют как сумму токов или напряжений от прямой, обратной и нулевой последовательностей.

Примеры расчета несимметричных режимов методом симметричных составляющих подробно описаны в [4].



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Т.1. - М.: Энергия, 1984.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. М.: Гардарики, 1999.-640 с.
3. Ионкин П.А. и др. Теоретические основы электротехники. Т.1. - М.: Высшая школа, 1976.
4. Атабеков Г.И. Линейные электрические цепи. Т.1.: Энергия, 1978. - 592 с.
5. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. - М.: Наука, 1965. – 779 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА	
1.1. Электрическая цепь, законы Ома и Кирхгофа.....	5
1.2. Преобразование схем замещения электрических цепей.....	8
1.3. Методы расчёта линейных электрических цепей постоянного тока...17	
2. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА	
2.1. Основные определения.....	42
2.2. Действующее значение синусоидального тока.....	44
2.3. Изображение синусоидальных электрических величин с помощью векторов.....	44
2.4. Мощность переменного тока.....	46
2.5. Синусоидальный ток в простейших цепях.....	48
2.6. Синусоидальный ток в последовательной цепи R, L и C.....	54
2.7. Расчёт цепей синусоидального тока при последовательном соединении элементов.....	59
2.8. Расчёт цепи синусоидального тока при параллельном соединении элементов.....	61
2.9. Резонанс в электрических цепях.....	66
2.10. Комплексный метод расчёта цепей переменного тока.....	71
2.11. Цепи со взаимной индуктивностью .....	89
3. ТРЁХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ	
3.1. Основные положения.....	97
3.2. Расчёт трёхфазной цепи при соединении нагрузки в звезду .....	100
3.3. Расчёт трёхфазной цепи при соединении нагрузки в треугольник.....	113
3.4. Мощность трёхфазной цепи.....	123
3.5. Метод симметричных составляющих.....	125
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....	129

Гетманов Виктор Тимофеевич

## ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Курс лекций по теоретическим основам электротехники

Учебное пособие для студентов специальности  
140211 – Электроснабжение всех форм обучения

Редактор Е.Ф. Изотова

Подготовка оригинала-макета О.В. Щекотихина

Подписано к печати 05.11.09. Формат 60x84 /16.

Усл. печ. л. 8,12. Тираж 100 экз. Заказ 09-768. Рег. № 80.

Отпечатано в РИО Рубцовского индустриального института  
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.